

Uitleg van de Hough transformatie

Maarten M. Fokkinga, Joeri van Ruth
Database groep, Fac. EWI, Universiteit Twente

Versie van 17 mei 2005, 10:59

De Hough transformatie is een wiskundige techniek om een stel figuren van gegeven vorm te vinden waarvan iedere figuur bij benadering gaat door veel gegeven punten. Wij zetten hier ons begrip van de techniek uiteen op een manier die verschilt van alles wat we op Internet hebben kunnen vinden.

Terminologie. We vatten een geometrische figuur op als een verzameling van punten. Dus voor een punt p en figuur F formuleren we ‘ p ligt op F ’ en ‘ F gaat door p ’ door $p \in F$, respectievelijk $F \ni p$. In beide gevallen zeggen we dat p en F *incident* zijn.

Abstracte algoritme. De taak is om bij gegeven punten p_1, \dots, p_m een stel figuren van gegeven vorm te vinden waarvan ieder incident is met “veel” p_i . We zeggen hier “veel” en niet “alle”, omdat we er van uit gaan dat er ruis is: punten die er toevallig zijn maar niet tot de te herkennen figuren behoren. De figuren worden gevonden door het volgende, triviale en voor de hand liggende, algoritme:

- Beschouw alle mogelijke figuren van de gezochte vorm [die incident zijn met tenminste één gegeven punt]. (Het voorgaande deel tussen haken is een optimalisatie die geen invloed heeft op de komende redenering of correctheid daarvan.)
- Ken aan iedere figuur een getal toe: het aantal van de gegeven punten waarmee de figuur incident is.
- Lever dan op: de figuren waaraan een “groot” getal is toegekend.

Het resultaat is een stel figuren waarvan ieder incident is met veel van de gegeven punten.

Het probleem is nu om een handige representatie te vinden om de figuren zelf en de toewijzing van getallen aan figuren te berekenen en op te slaan. Hiervoor gebruiken we de techniek van ‘parametervoorstelling’ van een figuur.

Parametervoorstelling. Vaak kan een *geometrische* figuur F gerepresenteerd worden door een *numerieke* parameter q tezamen met een relatie R die de punten p waaruit de figuur is opgebouwd relateert aan de parameter:

$$F(q) = \{p \mid p \underline{R} q\}$$

Definieer nu de “duale” figuurvorm door de p vast te nemen en de q te laten variëren:

$$G(p) = \{q \mid p \underline{R} q\}$$

De volgende dualiteitseigenschap is een onmiddellijk gevolg van deze definitie:

$$(1) \quad p \in F(q) \Leftrightarrow G(p) \ni q \qquad \text{Dualiteit}$$

Door deze eigenschap kunnen bewerkingen in termen van *gegeven punten* p en *gezochte figuren* $F(q)$ uitgedrukt worden in *gegeven figuren* $G(p)$ en *gezochte punten* q — wat een stuk makkelijker is. De duale definitie van G , en het uitbuiten van de dualiteit, is de gepatenteerde truc van Hough [1].

Voorbeelden.

- Voor een rechte lijn F op afstand r van de oorsprong en met hoek θ met de x-as geldt het volgende:

$$\begin{aligned} F &= F(r, \theta) = \{(x, y) \mid r = x \cos \theta + y \sin \theta\}, \quad \text{dus} \\ G &= G(x, y) = \{(r, \theta) \mid r = x \cos \theta + y \sin \theta\} \end{aligned}$$

In het platte vlak met een r -as en een θ -as ziet $G(x, y)$ er uit als een sinusoid.

- Op grond van de dualiteit is voor een sinusoid de duale een rechte lijn!
- Voor een cirkel F met straal r en middelpunt (a, b) geldt:

$$\begin{aligned} F &= F(r, a, b) = \{(x, y) \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}, \quad \text{dus} \\ G &= G(x, y) = \{(r, a, b) \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\} \end{aligned}$$

In een a, b, r -ruimte ziet $G(x, y)$ er uit als een kegel met z'n punt in $a, b, r = x, y, 0$. Let op: de figuurruimte is tweedimensionaal met assen voor x, y maar de duale ruimte is driedimensionaal met assen voor r, a, b .

- Ingewikkelder figuren (denk aan driehoeken, vierkanten, cilinders) zijn vaak opgebouwd uit rechte lijnen en cirkels, en eenvoudiger figuren waarvoor een parameter-voorstelling bekend is.

Einde van de voorbeelden.

We nemen in het vervolg steeds stilzwijgend aan dat q varieert over “het parameterdomein” dat hoort bij het eigenlijke “domein” voor p ; en omgekeerd.

Concreet algoritme. Door de dualiteit (1) zijn de punten van $G(p)$ precies de parameterwaarden van de figuren incident met p , en kunnen we de parameterwaarden van alle figuren incident met p opsommen door de punten van figuur $G(p)$ af te lopen. Hiermee is het eerste deel van het algoritme effectief uitvoerbaar.

Beschouw nu het tweede deel van het algoritme: ken aan iedere figuur $F(q)$, gerepresenteerd door parameter q , een getal toe. Die getallen slaan we op in een array A geïndiceerd met q -waarden. Het getal dat aan $F(q)$, of te wel aan $A[q]$, toegekend wordt is het aantal van de gegeven punten waarmee de figuur incident is. Dus iedere gegeven p_i die incident is met $F(q)$, draagt één bij aan dat aantal voor q . Vanwege de dualiteit (1) is dit het zelfde als: iedere gegeven p_i waarvoor $G(p_i)$ incident is met q , draagt één bij aan dat aantal voor q . Dit realiseren we door elke $G(p_i)$ te doorlopen en voor elk punt q dat we daarbij tegenkomen, $A[q]$ één op te hogen. Het array moet op 0 geïnitieerd worden, overeenkomend met het feit dat nog voor geen enkele figuur iets geteld is.

Daarmee hebben we de volgende effectief uitvoerbare vorm van het algoritme gevonden:

- Neem een array A met als indices de parameterwaarden van de figuren, overal geïnitieerd op 0.
- Voor iedere p_i :
doorloop $G(p_i)$ en voor elk punt q dat bezocht wordt, hoog $A[q]$ één op.
- Voor iedere q met een “grote” waarde $A[q]$: lever q op, dat wil zeggen $F(q)$.

Het resultaat is een stel figuren waarvan ieder incident is met veel van de gegeven punten.

Formalisering. Wat we hier boven in woorden gezegd hebben, kunnen we gemakkelijk in formules weergeven. Het abstracte algoritme luidt als volgt:

$$\text{let } \mathcal{F} = \{F \mid (\exists i \bullet p_i \in F)\}; \quad A = (\lambda F : \mathcal{F} \bullet \#\{i \mid p_i \in F\}) \bullet \{F : \mathcal{F} \mid A[F] \text{ is big}\}$$

Het deel $(\exists i \bullet p_i \in F)$ in de definitie van \mathcal{F} is de al opgemerkte optimalisatie, en kan desgewenst geschrapt worden. De definitie van A is de toekenning aan een figuur van het aantal gegeven punten dat incident is met de figuur. Het laatste deel is de opgeleverde verzameling figuren waaraan een groot getal is toegekend.

We representeren nu een figuur $F = F q$ door z'n parameterwaarde q , en krijgen dan:

$$\text{let } \mathcal{Q} = \{q \mid (\exists i \bullet p_i \in F q)\}; \quad A = (\lambda q : \mathcal{Q} \bullet \#\{i \mid p_i \in F q\}) \bullet \{q : \mathcal{Q} \mid A[q] \text{ is big}\}$$

Verzameling \mathcal{Q} is het domein van A (nodig om de juiste declaratie van A te geven); deze ligt vast met de keuze van de parametervoorstelling voor de figuren, en de bepaling gebeurt dus éénmalig vooraf, en werken we niet verder uit. Ook het opleveren van de alle q 's met grote $A[q]$ waarde behoeft geen verdere uitwerking. Blijft over: de definitie van A . Toepassen van de dualiteit daarop levert:

$$A = (\lambda q : \mathcal{Q} \bullet \#\{i \mid G p_i \ni q\})$$

Deze gelijkheid kan gerealiseerd worden door het volgende programma:

$$\text{for } q : \mathcal{Q} \text{ do } A[q] := 0 \text{ end; } \quad \text{for } i \text{ do for } q \in G p_i \text{ do } A[q] := A[q] + 1 \text{ end end;}$$

Merk op dat de nesting van i binnen q (in $A = \lambda q \bullet \#\{i \mid \dots\}$) nu omgekeerd is (namelijk $\text{for } i \text{ do for } q \text{ do } A[q] := \dots$). Dit is essentieel voor de praktische efficiëntie.

Om over te slaan! Een formele afleiding van de definitie van A naar het imperatieve programma is —natuurlijk— ook mogelijk, maar staat geheel los van de Hough transformatie. Voor de liefhebber geven we het hier toch; anderen kunnen het overslaan. Merk op dat de verzameling $\{ \mid P \bullet i \}$ leeg is als P niet geldt, en de singleton verzameling $\{i\}$ anders. We gebruiken $+$ en \sum voor optelling van getallen, en $+$ en \sum' als puntsgewijze optelling van getalwaardige functies. Hier is de afleiding:

$$\begin{aligned} & A = (\lambda q : \mathcal{Q} \bullet \#\{i \mid G p_i \ni q\}) \\ \Leftrightarrow & A = (\lambda q : \mathcal{Q} \bullet \#\{i \mid G p_i \ni q \bullet i\}) \\ \Leftrightarrow & A = (\lambda q : \mathcal{Q} \bullet \sum_i \#\{ \mid G p_i \ni q \bullet i\}) \\ \Leftrightarrow & A = \sum'_i (\lambda q : \mathcal{Q} \bullet \#\{ \mid G p_i \ni q \bullet i\}) \\ \Leftrightarrow & A := (\lambda q : \mathcal{Q} \bullet 0); \quad \text{for } i \text{ do } A := A + (\lambda q : \mathcal{Q} \bullet \#\{ \mid G p_i \ni q \bullet i\}) \\ \Leftrightarrow & \text{for } q : \mathcal{Q} \text{ do } A[q] := 0 \text{ end; for } i \text{ do for } q : \mathcal{Q} \text{ do } A[q] := A[q] + \#\{ \mid G p_i \ni q \bullet i\} \text{ end end;} \\ \Leftrightarrow & \text{for } q : \mathcal{Q} \text{ do } A[q] := 0 \text{ end; for } i \text{ do for } q : \mathcal{Q} \text{ do } A[q] := A[q] + (\text{if } G p_i \ni q \text{ then } 1 \text{ else } 0) \text{ end end;} \\ \Leftrightarrow & \text{for } q : \mathcal{Q} \text{ do } A[q] := 0 \text{ end; for } i \text{ do for } q : \mathcal{Q} \text{ do } (\text{if } G p_i \ni q \text{ then } A[q] := A[q] + 1) \text{ end end;} \\ \Leftrightarrow & \text{for } q : \mathcal{Q} \text{ do } A[q] := 0 \text{ end; for } i \text{ do for } q \in G p_i \text{ do } A[q] := A[q] + 1 \text{ end end;} \end{aligned}$$

Met benaderingen. Waarden die in de praktijk verkregen zijn, zijn vaak onnauwkeurig. Dus de échte taak is om figuren te vinden waarvan ieder *bij benadering* incident is met veel gegeven punten p_i . Daarom voeren we het begrip ε -incidentie in (genoteerd met \in_{ε}):

$$p \in_{\varepsilon} F \Leftrightarrow p \text{ is minder dan } \varepsilon \text{ verwijderd van } F$$

We gaan verder niet in op de manier waarop afstanden gedefinieerd zijn.

Beschouw nu de volgende versterking van de dualiteit (ik weet niet of een zwakkere versterking ook voldoende is):

Bij iedere ε is er een δ zodanig dat:

$$(2) \quad p \in_{\varepsilon} F(q) \Leftrightarrow G(p) \ni_{\delta} q \quad \varepsilon, \delta\text{-Dualiteit}$$

Wanneer deze versterking geldt, kunnen we het abstracte algoritme aanpassen door ‘incidentie’ te vervangen door ‘ ε -incidentie’. Omwille van de efficiëntie partitioneren we de verzameling van figuren in klassen van figuren die onderling weinig van elkaar verschillen, en beschouwen we niet alle figuren maar slechts één figuur per klasse. Op grond van de ε, δ -dualiteit (2) definiëren we dat figuren weinig van elkaar verschillen wanneer hun parameterwaarden hooguit δ verschillen. Het abstracte algoritme luidt dan als volgt:

- Beschouw alle figuurklassen waarvan de representant ε -incident is met tenminste één gegeven punt.
- Ken aan iedere figuurklasse een getal toe: het aantal van de gegeven punten waarmee de representantfiguur ε -incident is.
- Lever dan op: (representanten van) de klassen waaraan een groot getal is toegekend.

Geconcretiseerd met behulp van de ε, δ -dualiteit levert dit de volgende concrete vorm:

Partitioneer de parameterwaarden van de figuren in klassen waarvan in iedere klasse de onderlinge verschillen hooguit δ zijn. Laat q_1, \dots, q_n representanten zijn van de klassen.

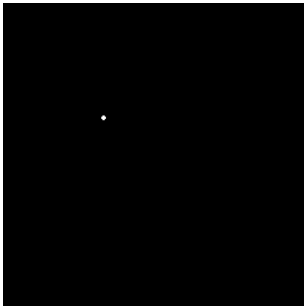
- Neem een array A met als indices q_1, \dots, q_n , overal geïnitieerd op 0.
- Voor iedere p_i :
doorloop $G(p_i)$ en voor elk punt q_j dat bezocht wordt op een afstand van hooguit δ , hoog $A[q_j]$ één op.
- Voor iedere q_j met een “grote” waarde $A[q_j]$: lever q_j op, dat wil zeggen, $F(q_j)$.

Het resultaat is een stel figuren waarvan elk ε -incident is met veel gegeven punten.

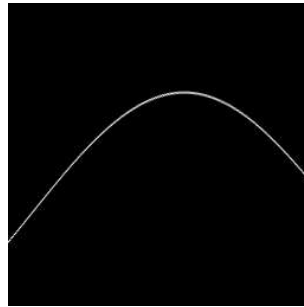
Interactieve illustratie. De dualiteit wordt voor het geval van rechte lijnen zéér leerzaam geïllustreerd door de java applet <http://www.vision.ee.ethz.ch/~jhug/MoseIadarola/Hough6.html> (bezocht op 6 april 2005, en de code is inmiddels ook bij MMF verkrijgbaar).

Illustraties van rechte lijnen en daaruit opgebouwde figuren, en hun dualen, staan op <http://www.cs.iastate.edu/~baojie/acad/past/imageprocessing/hough.htm>:

De wereld van pnt p , en fig $F(q)$ \Leftrightarrow de wereld van fig $G(p)$, en pnt q :



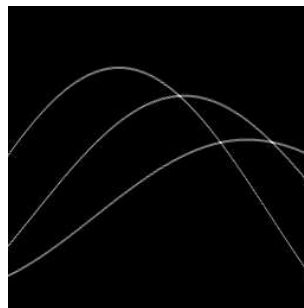
$p \in F(q)$
lijn $F(q)$ door gegeven punt p



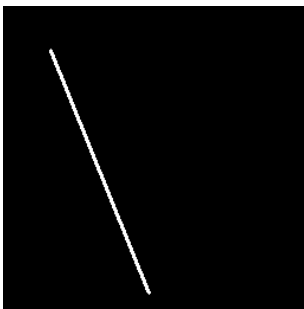
$\Leftrightarrow G(p) \ni q$
 \Leftrightarrow punt q op gegeven sinusoïde $G(p)$;
iedere q op de sinusoïde repr't een lijn door p



p_1 en p_2 op één lijn $F(q)$
elk paar punten ligt op één lijn



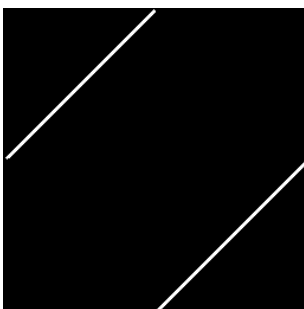
$\Leftrightarrow G(p_1)$ en $G(p_2)$ door één punt q .
 \Leftrightarrow elk paar sinusoïden gaan door één punt.



vele punten op één lijn
ontbrekende punten vallen niet op
een extra punt niet op de lijn



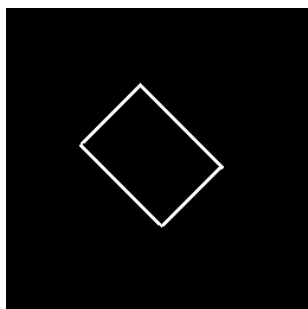
\Leftrightarrow vele sinusoïden door één punt.
 \Leftrightarrow ontbrekende sinusoïden vallen niet op.
 \Leftrightarrow een extra sinusoïde niet door het punt.



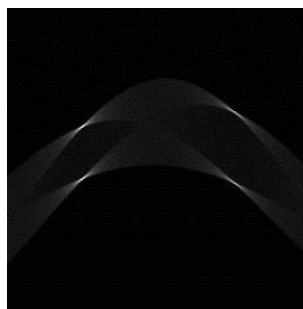
(heel veel punten op) twee lijnen



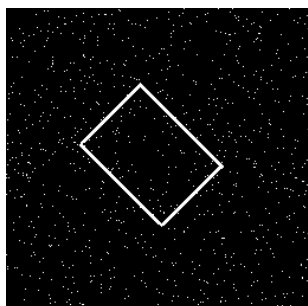
\Leftrightarrow (heel veel sinusoïden door) twee punten.



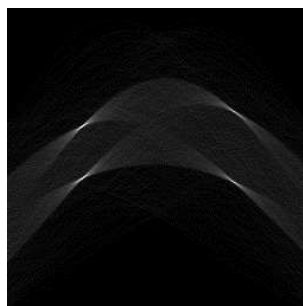
(heel veel punten op) vier lijnen



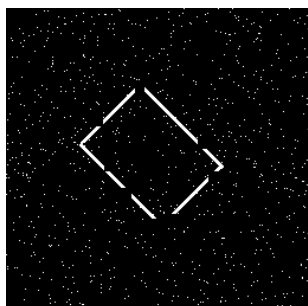
⇔ (heel veel sinusoiden door) vier punten.



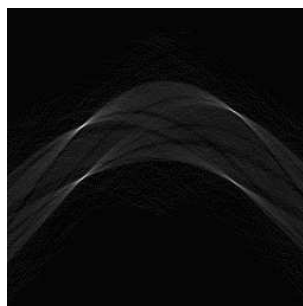
(heel veel punten op) vier lijnen
extra punten niet op de lijnen



⇔ (heel veel sinusoiden door) vier punten.
⇔ extra sinusoiden niet door de punten.



(heel veel punten op) vier lijnen
extra punten niet op de lijnen
ontbrekende punten vallen niet op
dwz 4 lijnen goed te herkennen



⇔ (heel veel sinusoiden door) vier punten.
⇔ extra sinusoiden niet door de punten.
⇔ ontbrekende sinusoiden vallen niet op
dwz 4 punten goed te herkennen.

Referenties

- [1] P.V.C. Hough. Method and means for recognizing complex patterns. U.S. Patent 3,069,654, December 18, 1962.