$C^{2,\alpha}$-a-priori Abschätzungen und ein Existenzsatz für harmonische Abbildungen mit Finsler'schem Urbild

Diplomarbeit

von

Matthias Schlottbom
Matr.-Nr.: 251942

in Computermathematik

vorgelegt der Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen

im März 2008

Angefertigt am Institut für Mathematik

bei

Prof. Dr. Heiko von der Mosel

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt, nicht anderweitig zu Prüfungszwecken vorgelegt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe. Sämtliche wissentlich verwendeten Textausschnitte, Zitate oder Inhalte anderer Verfasser wurden ausdrücklich als solche gekennzeichnet.

Aachen, den

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Sei $(\mathcal{M}, F)$ eine vollständige, berandete, orientierte und kompakte Finsler-Mannigfaltigkeit der Dimension m und $(\mathcal{N}, h)$ eine vollständige, unberandete Riemann'sche Mannigfaltigkeit der Dimension n. In dieser Arbeit wollen wir das Dirichlet-Problem harmonischer Abbildungen von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$ untersuchen, d.h. wir untersuchen die Menge der harmonischen Abbildungen $U : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, die auf dem Rand $\partial\mathcal{M}$ von $\mathcal{M}$ mit einer vorgeschriebenen Abbildung $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ übereinstimmen. Wir fordern in dieser Arbeit, dass die Abbildung Φ eine Kleinheitsbedingung erfüllt. Genauer fordern wir, dass $\Phi(\mathcal{M})$ Teilmenge eines regulären Balls $\mathcal{B}_L(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{N}$ mit Mittelpunkt $\mathcal{Q} \in \mathcal{N}$ und Radius $L > 0$ ist. Wir nennen einen geodätischen Ball

$$\mathcal{B}_L(\mathcal{Q}) = \{\mathcal{P} \in \mathcal{N} : \operatorname{dist}_{\mathcal{N}}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \leq L\}$$

einen *regulären Ball*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\sqrt{\kappa} L < \frac{\pi}{2}$,

(ii) $C(\mathcal{Q}) \cap \mathcal{B}_L(\mathcal{Q}) = \emptyset$.

Wir bezeichnen hierbei mit $C(\mathcal{Q})$ den Schnittort des Mittelpunktes $\mathcal{Q}$, vgl. [GKM, Abschnitt 5.4]. Des Weiteren deklarieren wir mit $\mathbf{K}_{\mathcal{N}}$ die Schnittkrümmung von $\mathcal{N}$ und setzen damit:

$$\kappa := \max(0, \sup_{\mathcal{B}_L(\mathcal{Q})} \mathbf{K}_{\mathcal{N}}) \qquad \text{und} \qquad \omega := \min(0, \inf_{\mathcal{B}_L(\mathcal{Q})} \mathbf{K}_{\mathcal{N}}).$$

Wir fordern also, dass die Schnittkrümmung $\mathbf{K}_{\mathcal{N}}$ von $\mathcal{N}$ durch ω und κ beschränkt ist. Zur Veranschaulichung geben wir später in diesem Abschnitt einige Beispiele regulärer Bälle. Darüber hinaus erläutern wir die Bedeutung der Bedingung $\sqrt{\kappa} L < \frac{\pi}{2}$.
Mit Hilfe dieser Begriffsbildung können wir unser Hauptresultat, welches wir mit Hilfe von a-priori Abschätzungen von harmonischen Abbildungen und der Leray-Schauder-Abbildungsgrad-Theorie beweisen können, als folgenden Satz formulieren:

Satz 1.1 (Existenzsatz).
Seien $(\mathcal{M}, F)$ *und* $(\mathcal{N}, h)$ *wie oben. Zusätzlich sei* $(\mathcal{N}, h)$ *eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit der Klasse* C^3. *Sei* $\mathcal{B}_L(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{N}$ *ein regulärer Ball und* $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$ *eine gegebene Abbildung der Klasse* $C^{2,\alpha_0}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, $\alpha_0 \in (0,1)$. *Dann existiert eine harmonische Abbildung* $U : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ *der Klasse* $C^{2,\alpha}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ *mit* $U(\mathcal{M}) \subset \mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$ *und mit* $U|_{\partial\mathcal{M}} = \Phi|_{\partial\mathcal{M}}$, *wobei* α *nur von den geometrischen Daten des Problems und der Abbildung* Φ *abhängt.*

Wir geben nun einen Überblick über den Aufbau der Arbeit. Im zweiten Kapitel legen wir die Notation fest und geben grundlegende Hilfsmittel an, um das Dirichlet-Problem harmonischer Abbildungen mit Finsler'schem Urbild zu lösen. Insbesondere geben wir in Kapitel 2 die Definition einer harmonischen Abbildung auf einer Finsler-Mannigfaltigkeit. Dazu führen wir die Energiedichte $e(U)$ einer Abbildung $U : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ ein, und stellen dar, wie durch Integration der Energiedichte $e(U)$ über der Finsler-Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ eine Energie $\mathbf{E}(U)$ der Abbildung U definiert werden kann. Dabei werden wesentliche Konzepte der Finsler-Geometrie kurz erläutert. Am Schluß von Kapitel 2 formulieren wir in Satz 2.13 die für uns zentrale a-priori Abschätzung von harmonischen Abbildungen bezüglich der $C^{2,\alpha}$-Norm.
Im dritten Kapitel verallgemeinern wir ein Resultat von Hildebrandt, Kaul und Widman [HKW2] über die Stetigkeit harmonischer Abbildungen zwischen Riemann'schen Mannigfaltigkeiten. Im Gegensatz zu [HKW2] benutzen wir für den Stetigkeitsbeweis keine Green'schen Funktionen. Des Weiteren ergänzen wir die a-priori Abschätzungen von harmonischen Abbildungen auf Finsler-Mannigfaltigkeiten, die kürzlich von von der Mosel und Winklman in [MW] hergeleitet wurden, siehe Satz 2.12.
In den Kapiteln 4 und 5 verallgemeinern wir die Resultate von Giaquinta und Hildebrandt [GH] über a-priori Abschätzungen des Gradienten harmonischer Abbildungen zwischen Riemann'schen Mannigfaltigkeiten, die mit Hilfe mollifizierter Green'scher Funktionen hergeleitet wurden. Für den Beweis verwenden wir eine Technik, die den Ideen von Campanato [Ca] folgt und in [GH, Section 7] skizziert ist.
Im sechsten Kapitel zeigen wir, wie mit Hilfe der linearen Theorie der elliptischen, partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und den vorangegangenen Resultaten höhere Regularität bewiesen werden kann.
Zum Abschluß der Arbeit beweisen wir in Kapitel 7 das in Satz 1.1 angegebene Existenzresultat für harmonische Abbildungen, welches ein Resultat über die Existenz harmonischer Abbildungen zwischen Riemann'schen Mannigfaltigkeiten von Hildebrandt, Kaul und Widman [HKW1] verallgemeinert. Für den Beweis kombinieren wir wie in [HKW1] die a-priori Abschätzungen mit der Leray-Schauder-Abbildungsgrad-Theorie. Die Tatsache, dass das Bild der harmonischen Abbildung U selbst in einem regulären Ball liegt, ist dann eine Folgerung aus dem schwachen Maximumprinzip.

Das Resultat aus [HKW1] wurde in einer leicht verbesserten Version von denselben Autoren in [HKW2] über einen variationellen Zugang hergeleitet. Dieser erlaubte aber keine a-priori Abschätzungen.
In dem Fall, dass das Urbild eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit ist und die Dimension $m = 1$ ist, reduziert sich das Dirichlet-Problem auf Geodätische in $\mathcal{N}$. Dies wurde in den grundlegenden Arbeiten von Hilbert und Morse studiert. Der Fall $m = 2$ wurde ausgiebig von Morrey in [M1] und [M2] sowie von vielen anderen Autoren behandelt. Für mehr Informationen dazu verweisen wir auf den Übersichtsartikel von Eells und Lemaire [EL].
Für $m \geq 3$ gibt es Existenzresultate von Eells und Sampson [ES] und Hamilton [Ha], die jedoch voraussetzen, dass die Schnittkrümmung $\mathbf{K}_{\mathcal{N}}$ der Zielmannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ nicht-positiv ist.
Falls $\mathbf{K}_{\mathcal{N}}$ beschränkt ist und falls das Urbild eine Riemann'schen Mannigfaltigkeit ist, setzen Giaquinta, Hildebrandt, Kaul und Widman in [HKW1], [HKW2] und [GH] voraus, dass die vorgeschriebenen Randdaten in einem regulären Ball liegen. Mit dieser Kleinheitsbedingung an das Bild der harmonischen Abbildung U und der gegebenen Randabbildung Φ, aber mit einer Finsler-Mannigfaltigkeit als Definitionsbereich operieren von der Mosel und Winklman in [MW]. Für den Beweis der Ergebnisse von [MW] wird anstelle von Green'schen Funktionen eine geschickte Iterationsprozedur und eine schwache Harnack-Ungleichung für Sublösungen von linearen partiellen Differentialgleichungen eingesetzt. Das Vorgehen in [MW] basiert auf einem Zugang von Pingen [Pi], der Ideen von Caffarelli [Caf] und M. Meier [Me] genutzt hat, um einerseits harmonische Abbildungen zwischen Riemann'schen Mannigfaltigkeiten und andererseits parabolische Systeme und singuläre elliptische Systeme zu untersuchen. Diese Kleinheitsbedingung setzen auch wir in dieser Arbeit voraus. Der Begriff regulärer Ball soll wie oben angekündigt mit den folgenden Beispielen ein wenig illustriert werden:

1. Falls $\mathcal{N}$ einfach zusammenhängend und die Dimension $n \geq 2$ ist, sowie für die Schnittkrümmung $\mathbf{K}_{\mathcal{N}} \leq 0$ gilt, dann ist jeder Ball in $\mathcal{N}$ regulär, vgl. [GKM, Seite 201].

2. Falls $\mathcal{N}$ zusammenhängend und orientierbar ist, die Dimension n von $\mathcal{N}$ gerade ist, sowie für die Schnittkrümmung $0 < \mathbf{K}_{\mathcal{N}} \leq \pi$ gilt, dann ist jeder Ball $\mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$ in $\mathcal{N}$ regulär, vgl. [GKM, Seite 227-228], falls $L < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$.

3. Falls $\mathcal{N}$ kompakt, zusammenhängend und nicht-orientierbar ist, die Dimension n von $\mathcal{N}$ gerade ist, $0 < \mathbf{K}_{\mathcal{N}} \leq \pi$ und $L < \frac{\pi}{4\sqrt{\kappa}}$, so ist jeder Ball $\mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$ in $\mathcal{N}$ regulär, vgl. [GKM, Seite 229-230].

4. Falls $\mathcal{N}$ einfach zusammenhängend ist, $0 < \frac{\kappa}{4} < \mathbf{K}_{\mathcal{N}} \leq \kappa$ und $L < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$ gilt, so ist jeder Ball $\mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$ in $\mathcal{N}$ regulär, vgl. [GKM, Seite 254].

5. Wenn $\mathcal{N} = \mathcal{S}^n$ die Einheitssphäre ist, dann sind alle Bälle, die in der offenen oberen Halbsphäre enthalten sind, regulär.

Man nennt eine stetige harmonische Abbildung, die in einen regulären Ball abbildet und vorgeschriebene Randwerte besitzt, auch *kleine* Lösung. Ab jetzt beziehen wir uns nur auf den Fall, dass $\mathcal{M}$ eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit ist. Hierfür haben Jäger und Kaul in [JK1] gezeigt, dass es höchstens eine kleine Lösung für das Dirichlet-Problem gibt, sofern die Randabbildung Φ wenigstens stetig ist. Dieses Resultat ist optimal in der Hinsicht, dass $\sqrt{\kappa}L \leq \pi/2$ statt $\sqrt{\kappa}L < \pi/2$ in der Definition eines regulären Balles nicht zugelassen ist. Wir geben folgendes Beispiel aus [GH]. Für $m = 1$, $n = 2$ und $\mathcal{N} = \mathcal{S}^2$ ist jeder Ball $\mathcal{B}$, der in der oberen offenen Hemisphäre $\mathcal{K}$ enthalten ist, regulär. Aber $\overline{\mathcal{K}}$ ist nicht regulär, denn jedes Paar von antipodische Punkten auf dem Äquator $\partial\mathcal{K}$ kann durch überabzählbar viele Geodätische, die in $\mathcal{B} = \overline{\mathcal{K}}$ enthalten sind, verbunden werden.
Ebenso wichtig ist die Bedingung $\sqrt{\kappa}L < \pi/2$ für die Existenz harmonischer Abbildungen mit gewissen Regularitätsanforderungen. In [HKW2, Section 6] wird unter der Voraussetzung $\sqrt{\kappa}L = \pi/2$ ein Beispiel einer unstetigen schwach harmonischen Abbildung gegeben, die durch die Randdaten beschränkt ist.
Als weiteren Grund für die Bedeutung der Bedingung $\sqrt{\kappa}L < \pi/2$ geben wir nun ein altes Beispiel von E. Heinz. Es zeigt, dass es unmöglich ist, a-priori Abschätzungen herzuleiten, sofern die Bedingung $\sqrt{\kappa}L < \pi/2$ verletzt ist. Wir betrachten als Zielmannigfaltigkeit die zweidimensionale Einheitssphäre $\mathcal{N} = \mathcal{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ und als Urbildmannigfaltigkeit $\mathcal{M} = \mathbb{R}^1$. Eine Abbildung $u : \mathbb{R}^1 \to \mathcal{S}^2$ ist harmonisch, wenn folgende Gleichung gilt:

$$\ddot{u} + u|\dot{u}|^2 = 0.$$

Damit sind für jeden Parameter $p \in \mathbb{N}$ die Abbildungen $u_p : \mathbb{R}^1 \to \mathcal{S}^2$, definiert durch $u_p(t) := (\cos pt, \sin pt, 0)$, harmonisch. Es gilt aber $|\dot{u}_p(t)| = p$. Also sehen wir, dass man keine a-priori Schranken an den Gradienten der harmonischen Abbildung, die nur von den geometrischen Parametern von $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ abhängen, herleiten kann.
Zuletzt wollen wir noch erwähnen, dass es für den Fall, dass das Dirichlet Problem nur nicht-reguläre Lösungen oder dass es neben regulären auch nicht-reguläre Lösungen hat, viele Resultate aus dem Bereich der partiellen Regularitätstheorie gibt, welche die möglichen Singularitäten klassifizieren. Ein bekanntes Resultat aus diesem Bereich stammt von Giaquinta und Giusti, [GG]. Es besagt, dass die Hausdorff-Dimension der singulären Punkte einer Abbildung U mit endlicher Energie und beschränktem Bild, die ein Minimum des Energiefunktionals bezüglich fester Randdaten ist, kleiner oder gleich $m - 3$ ist. Für den Fall $m = 3$ kann U höchstens isolierte singuläre Punkte haben. Das schon oben genannte Beispiel aus [HKW2, Section 6] gibt eine solche unstetige schwach harmonische Abbildung U an. Für eine Einführung in die partielle Regularitätstheorie verweisen wir auf das Buch

[GM] von Giaquinta und Martinazzi.

Zum Abschluß möchte sich der Autor für die große Unterstützung, die ihm von Prof. Dr. Heiko von der Mosel bei der Erstellung der Arbeit entgegengebracht wurde, herzlich bedanken.

Kapitel 2

Grundlagen und Resultate

2.1 Definitionen und Notation

Wir möchten zu Beginn unsere Notation festlegen. Für eine Abbildung $u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $u = (u^1, \dots, u^n)$, definieren wir:

$$\begin{aligned}
|u|^2 &:= \sum_{i=1}^{n} (u^i)^2 = u^i u^i, \\
D_\alpha u^i &:= \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \qquad \text{für } \alpha \in \{1, \dots, m\},\ i \in \{1, \dots, n\}, \\
\nabla u &:= (D_\alpha u^i)_{\substack{i=1,\dots,n \\ \alpha=1,\dots,m}}, \\
|\nabla u|^2 &:= D_\alpha u^i D_\alpha u^i,
\end{aligned}$$

wobei wir die Einsteinsche Summenkonvention verwenden, d.h. sich wiederholende griechische Indizes werden automatisch von 1 bis m summiert, sich wiederholende lateinische Indizes von 1 bis n. Außerdem benutzen wir stillschweigend die Identifikation $\mathbb{R}^{m \times n} \cong \mathbb{R}^{mn}$ für $m, n \in \mathbb{N}$.

Weiterhin bezeichnen wir für eine offene Menge $G \subset \mathbb{R}^m$ mit $L^2(G)$ den Raum der bezüglich des Lebesguemaßes quadratisch integrierbaren Funktionen und mit

$$\begin{aligned}
W^{1,2}(G) := \{u \in L^2(G) : \forall \alpha = 1, \dots, m,\ \exists u_\alpha \in L^2(G) :& \\
\int_G u_\alpha(x) \varphi(x)\, dx = - \int_G u(x) D_\alpha \varphi(x)\, dx \ \ \forall \varphi \in C_0^\infty(G)\}&
\end{aligned}$$

den Sobolevraum vom Grad 1 zum Exponenten 2. Die Funktionen $D_\alpha u := u_\alpha$ heißen schwache Ableitung von u, und u nennen wir eine Sobolevfunktion. Versehen mit der Norm

$$\|u\|_{W^{1,2}(G)} := \|u\|_{L^2(G)} + \sum_{\alpha=1}^{m} \|D_\alpha u\|_{L^2(G)}$$

wird der Raum $W^{1,2}(G)$ zu einem Banachraum. Der Raum $W_0^{1,2}(G)$ ist der Abschluss des Raumes $C_0^\infty(G)$ bezüglich der $W^{1,2}$-Norm und ist ebenfalls ein Banachraum. Der Raum $W^{1,2}(G,\mathbb{R}^n)$ besteht gerade aus denjenigen Funktionen $u : G \to \mathbb{R}^n$, für die jede Komponente u^i, $i = 1,\dots,n$, eine Sobolevfunktion ist. Zwei Sobolevfunktionen u und v sind gleich, wenn sie für L^1-fast alle $x \in G$ übereinstimmen. Wenn wir von Suprema von Sobolevfunktionen sprechen, meinen wir die essentiellen Suprema. Falls wir auf eine spezielle Eigenschaft einer Sobolevfunktion u schließen, dann bedeutet dies, dass es einen Repräsentanten u^* in der Äquivalenzklasse von u gibt, der diese Eigenschaft hat. Mit diesem Repräsentanten werden wir dann in der Regel weiterarbeiten.
Für $1 \le p < \infty$ und $\lambda \ge 0$ definieren wir den Campanato-Raum $\mathcal{L}^{p,\lambda}(G)$ wie folgt:

$$\mathcal{L}^{p,\lambda}(G) := \{u \in L^p(G) : \sup_{\substack{x_0\in G\\ \rho>0}} \rho^{-\lambda} \int_{G\cap B_\rho(x_0)} |u - u_{x_0,\rho}|^p \, dx < \infty\},$$

wobei $u_{x_0,\rho} := \fint_{G\cap B_\rho(x_0)} u \, dx := \frac{1}{\mathrm{meas}(G\cap B_\rho(x_0))} \int_{G\cap B_\rho(x_0)} u \, dx$ den Mittelwert von u auf $G \cap B_\rho(x_0)$ bezeichne. Wir definieren auf dem Campanato-Raum $\mathcal{L}^{p,\lambda}(G)$ die Seminorm

$$[u]_{p,\lambda}^p := \sup_{\substack{x_0\in G\\ \rho>0}} \rho^{-\lambda} \int_{G\cap B_\rho(x_0)} |u - u_{x_0,\rho}|^p \, dx,$$

und die Norm

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(G)} := \|u\|_{L^p(G)} + [u]_{p,\lambda}\,,$$

so dass der Campanato-Raum mit dieser Norm ein Banachraum ist. Wir bezeichnen mit $C^k(G)$ den Raum aller k-mal stetig differenzierbaren, reellwertigen Funktionen, wobei $k \in \mathbb{N}$ und $G \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Menge sei. Dahin gegen bezeichne $C^k(\overline{G})$ diejenige Teilmenge von $C^k(G)$, deren Elemente sich bis zur k-ten Ableitung stetig auf $\overline{G}$ fortsetzen lassen. Sei nun $\alpha \in (0,1)$. Wir definieren die Hölderhalbnorm von u wie folgt:

$$\mathrm{Höl}_{\alpha,G} u := \sup_{\substack{x,y\in G\\ x\neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Dann ist der Hölderraum der Ordnung k zum Exponenten α definiert durch:

$$C^{k,\alpha}(\overline{G}) := \{u \in C^k(\overline{G}) : \mathrm{Höl}_{\alpha,G}\partial^\gamma u < \infty \ \forall\, |\gamma| = k\}.$$

Versehen mit der Norm

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{G})} := \|u\|_{C^k(\overline{G})} + \sum_{|\gamma|=k} \mathrm{Höl}_{\alpha,G}\partial^\gamma u$$

ist der lineare Raum $C^{k,\alpha}(\overline{G})$ ein Banachraum.
Für weitere Begriffe aus dem Bereich der partiellen Differentialgleichungen verweisen wir

auf die Literatur, z.B. [GT]. Wir werden im Folgenden immer in lokalen Koordinaten rechnen. Dazu definieren wir die folgenden Mengen

$$\begin{aligned}\Sigma_{5d} &:= \{x = (x', x^m) \in \mathbb{R}^m : |x'| < 5d, 0 < x^m < 5d\},\\ \Sigma_{5d}^0 &:= \{x = (x', 0) \in \mathbb{R}^m : |x'| \le 5d\}.\end{aligned}$$

Für $x_0 = (x_0', 0) \in \Sigma_d^0$ definieren wir

$$\begin{aligned}S_R(x_0) &:= B_R(x_0) \cap \{x^m > 0\} \text{ und}\\ \Sigma_R^0(x_0) &:= \{x = (x', 0) \in \mathbb{R}^m : |x' - x_0'| < R\}.\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass $\Sigma_{5d} \cup \Sigma_{5d}^0$ und $B_R(x_0) \cap \{x^m \ge 0\}$ offene Mengen in $\overline{E}$ für $E := \{x \in \mathbb{R}^m : x^m > 0\}$ sind. Wir nennen E auch den oberen Halbraum des $\mathbb{R}^m$ oder kurz $\mathbb{R}_+^m$.
Wir wollen nun die in dieser Arbeit vorkommenden Objekte der Differentialgeometrie einführen. Eine genauere Einführung in dieses Gebiet ist z.B. in den Büchern [GKM] für die Riemann'sche Geometrie oder [BCS] für die Finsler-Geometrie zu finden.

Definition 2.1.
Eine *Mannigfaltigkeit* $\mathcal{M}^m$ der Dimension m ist ein topologischer Hausdorffraum, so dass jeder Punkt aus $\mathcal{M}^m$ eine Umgebung besitzt, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ ist.
$\mathcal{M}^m$ ist eine *Mannigfaltigkeit mit Rand*, wenn jeder Punkt aus $\mathcal{M}^m$ eine Umgebung besitzt, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge des abgeschlossenen Halbraums $\mathbb{R}_+^m$ ist. Die Punkte von $\mathcal{M}^m$, die eine Umgebung homöomorph zum $\mathbb{R}^m$ haben, werden innere Punkte genannt und diese bilden das Innere $int(\mathcal{M}^m)$ von $\mathcal{M}^m$. Die anderen Punkte werden Randpunkte genannt. Wir schreiben mit $\partial\mathcal{M}^m$ die Menge der Randpunkte von $\mathcal{M}^m$.

Daher ist eine Mannigfaltigkeit lokal kompakt und lokal zusammenhängend. Also ist eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit wegzusammenhängend. Wir wollen bemerken, dass $\overline{E}$ mit der Relativtopologie des $\mathbb{R}^m$ ein topologischer Raum ist. Offene Teilmengen von $\overline{E}$ sind also gerade diejenigen Mengen V, für die eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^m$ existiert mit $W \cap \overline{E} = V$. Für die Begriffe *lokale Karte, lokale Koordinaten, Atlas, Tangentialraum* oder *differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse* C^k usw. verweisen wir z.B. auf [Au, 1.2, 1.3, 1.4]. Der Rand $\partial\mathcal{M}^m \neq \emptyset$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ der Klasse C^k ist selbst eine C^k-differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $n-1$ ohne Rand, siehe [Au, Thm. 1.63]. Wir definieren jetzt den Begriff der Riemann'schen Mannigfaltigkeit, siehe z.B. [J2, Def. 1.4.1].

Definition 2.2.
Eine *Riemann'sche Mannigfaltigkeit der Klasse* C^k ist ein Paar $(\mathcal{N}^n, h)$, wobei $\mathcal{N}^n$ eine

Mannigfaltigkeit der Klasse C^k und h eine *Riemann'sche Metrik* ist. Eine Riemann'sche Metrik ist gegeben durch ein Skalarprodukt auf jedem Tangentialraum $T_p\mathcal{N}^n$, welches vom Fußpunkt $p \in \mathcal{N}^n$ abhängt.

In lokalen Koordinaten $x = (x^1, \ldots, x^n)$ von $\mathcal{N}$ ist die Metrik h durch die positiv definite, symmetrische Matrix $(h_{ij}(x))_{i,j=1,\ldots,n}$ gegeben, d.h.

$$h_{ij} = h_{ji} \text{ und } h_{ij}\xi^i\xi^j > 0$$

für alle $0 \neq (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n$. Das Produkt zweier Tangentialvektoren $v, w \in T_p\mathcal{N}^n$ mit Koordinaten $(v^1, \ldots, v^n)$ und $(w^1, \ldots, w^n)$ ist dann gegeben durch

$$\langle v, w \rangle := h_{ij}(x(p))v^i w^i.$$

Speziell gilt für die Basisvektoren $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, \ldots, n$, vgl. [GKM, Seite 7], von $T_p\mathcal{N}^n$ die Identität $\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = h_{ij}$. In der Definition der Basisvektoren tauchen Ableitungen der Koordinatenwahl x auf. Sind die Koordinatenwechsel C^k-regulär, so ist im Allgemeinen $h_{ij}(x(p))$ noch C^{k-1}-regulär. Die Komponenten Γ^i_{jk} des *Levi-Civita-Zusammenhangs*, siehe [GKM, Abschnitt 3.5], stehen in folgendem Zusammenhang mit den Komponenten h_{ij} des Fundamentaltensors bezüglich der Karte x

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2}h^{lk}\left[\frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial h_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k}\right].$$

Die Komponenten Γ^i_{jk} des Zusammenhangs von Levi-Civita sind die klassischen *Christoffel-Symbole zweiter Art*. An obiger Identität erkennt man, dass die Christoffel-Symbole Γ^i_{jk} noch C^{k-2}-regulär sind, falls die Koordinaten x k-mal stetig differenzierbar sind. Die Komponenten des Levi-Civita-Zusammenhangs sind also im Allgemeinen eine Differentiationsstufe schlechter als die Komponenten des Fundamentaltensors.

2.2 Basiskonzepte der Finsler-Geometrie

Kommen wir nun zu dem Konzept der Finsler-Mannigfaltigkeit.

Definition 2.3.
Sei $\mathcal{M}$ eine m-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit. Bezeichne mit $T_x\mathcal{M}$ den *Tangentialraum* an $x \in \mathcal{M}$ und $T\mathcal{M} := \bigcup_{x\in\mathcal{M}} T_x\mathcal{M}$ das *Tangentialbündel von* $\mathcal{M}$. Jedes Element aus $T\mathcal{M}$ hat die Form (x, y) mit $x \in \mathcal{M}$ und $y \in T_x\mathcal{M}$. Eine *Finsler-Struktur* auf $\mathcal{M}$ ist eine Funktion

$$F : T\mathcal{M} \to [0, \infty)$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. *Regularität*: F ist C^∞ auf dem geschlitzten Tangentialbündel $T\mathcal{M} \setminus 0 := \{(x,y) \in T\mathcal{M} \,|\, y \neq 0\}$.

2. *Positive Homogenität*: $F(x, \lambda y) = \lambda F(x,y)$ für alle $\lambda > 0$.

3. *Strikte Konvexität*: Die $m \times m$-Matrix

$$g_{\alpha\beta}(x,y) := \left(\left[\frac{1}{2}F^2\right]_{y^\alpha y^\beta}(x,y)\right)_{\alpha,\beta=1,\ldots,m}$$

ist positiv-definit in jedem Punkt aus $T\mathcal{M} \setminus 0$. Die Matrix $(g_{\alpha\beta})$ wird auch der *Fundamentaltensor* genannt.

Das Paar $(\mathcal{M}, F)$ wird *Finsler-Mannigfaltigkeit* genannt.
Die Koeffizienten des *Cartan-Tensors* sind gegeben durch

$$A_{\alpha\beta\gamma}(x,y) := \frac{F}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma}(x,y).$$

Bei der Definition der Koeffizienten des Cartan-Tensors sind wir der Konvention in [BCS, Seite 30 (2.1.6)] gefolgt, damit sind $g_{\alpha\beta}(x,y)$ und $A_{\alpha\beta\gamma}(x,y)$ positiv homogen vom Grad Null. Mit anderen Worten, diese Größen sind invariant unter der Skalierung $\lambda \mapsto \lambda y$. Der Cartan-Tensor misst die Abweichung einer Finsler-Struktur von einer Riemann'schen im folgenden Sinne: Die Finsler-Struktur ist Riemann'sch, d.h. $F(x,y)^2 = g_{\alpha\beta}(x)y^\alpha y^\beta$, genau dann, wenn die Koeffizienten des Cartan-Tensors verschwinden.
Sei nun und im Folgenden $(\mathcal{M}, F)$ eine m-dimensionale, glatte, orientierte Finsler-Mannigfaltigkeit und $\chi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ eine lokale Karte auf einer offen Menge $\Omega \subset \mathcal{M}$ mit lokalen Koordinaten $(x^1, \ldots, x^m)$. Ein Punkt $(x,y) \in T\mathcal{M}$ kann durch *Bündelkoordinaten* $(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^m) = (x^\alpha, y^\alpha)$, $\alpha = 1, \ldots, m$, identifiziert werden, wobei die letzten m Komponenten gegeben sind durch

$$y = y^\alpha \left.\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right|_x \in T_x\mathcal{M}.$$

Wir werden im Folgenden nicht zwischen dem Punkt (x,y) und seiner Koordinatendarstellung (x^α, y^α) unterscheiden. In dieser Arbeit wollen wir Aussagen über harmonische Abbildungen mit einer Finsler-Mannigfaltigkeit als Urbild herleiten. Wir erwarten also, mit energieminimierenden Abbildungen zu arbeiten. Hierzu müssen die folgenden grundlegenden Fragen beantwortet werden. Wie kann die Energie einer Abbildung geeignet verallgemeinert werden und wie misst man diese Energie?
Dazu wollen wir jetzt zuerst einige Ergebnisse aus [MW] zusammenfassen. Hierzu vergrößern wir allerdings vorher noch unseren theoretischen Rahmen. Wir bezeichnen mit

$$\pi : T\mathcal{M} \to \mathcal{M}, \qquad \pi(x,y) := x$$

die natürliche Projektion von $T\mathcal{M}$ auf die Basismannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ und machen die folgende Definition.

Definition 2.4.
$\pi^*T\mathcal{M} := \bigcup_{(x,y)\in T\mathcal{M}\setminus 0} T_{\pi(x,y)}\mathcal{M} = \bigcup_{(x,y)\in T\mathcal{M}\setminus 0} T_x\mathcal{M}$ ist das mittels π *zurückgeholte (pullback) Bündel* von $T\mathcal{M}$. Analog bezeichnen wir mit $\pi^*T^*\mathcal{M}$ das mittels π zurückgeholte Kotangentialbündel von $T^*\mathcal{M}$.
Die beiden Vektorbündel $\pi^*T\mathcal{M}$ und $\pi^*T^*\mathcal{M}$ haben zwei global definierte, zueinander duale Schnitte, nämlich den *ausgezeichneten Schnitt*

$$l(x,y) := l^\alpha(x,y)\frac{\partial}{\partial x^\alpha} := \frac{y^\alpha}{F(x,y)}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

und die *Hilbert Form*

$$\omega(x,y) := \omega_\alpha(x,y)dx^\alpha := \frac{\partial F}{\partial y^\alpha}(x,y)dx^\alpha.$$

Wir fassen hier $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ als Schnitt von $\pi^*T\mathcal{M}$ und dx^α als Schnitt von $\pi^*T^*\mathcal{M}$ auf.
Weiter sind durch

$$\gamma^\alpha_{\beta\rho} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}\left(\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\beta\rho}}{\partial x^\sigma}\right)$$

die *formalen Christoffel-Symbole* (zweiter Art) gegeben. Hiermit können wir einen nichtlinearen Zusammenhang auf $T\mathcal{M}\setminus 0$, den so genannten *Ehresmann-Zusammenhang*, gegeben durch die Koeffizienten

$$\frac{1}{F}N^\alpha_\beta := \gamma^\alpha_{\beta\kappa}l^\kappa - A^\alpha_{\beta\kappa}\gamma^\kappa_{\rho\sigma}l^\rho l^\sigma,$$

definieren. Dabei ist $A^\alpha_{\beta\kappa} := g^{\alpha\mu}A_{\mu\beta\kappa}$.

Mit diesen Koeffizienten können wir folgende lokale Schnitte von $T(T\mathcal{M}\setminus 0)$ und $T^*(T\mathcal{M}\setminus 0)$ definieren:

$$\frac{\delta}{\delta x^\beta} := \frac{\partial}{\partial x^\beta} - N^\alpha_\beta\frac{\partial}{\partial y^\alpha}$$

und

$$\delta y^\alpha := dy^\alpha + N^\alpha_\beta dx^\beta.$$

Man kann nachweisen, dass $\left\{\frac{\delta}{\delta x^\alpha}, F\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right\}$ und $\left\{dx^\alpha, \frac{\delta y^\alpha}{F}\right\}$ zueinander duale Basen für das Tangentialbündel bzw. das Kotangentialbündel bilden. Man führt diese neuen Basen wegen ihrem schönen Transformationsverhalten unter Koordinatenwechseln ein, vgl. [MW, Lemma 2.2]. Mit diesen Basen kann man die so genannte *Sasaki-Metrik*

$$\mathcal{G} := g_{\alpha\beta}(x,y)dx^\alpha \otimes dx^\beta + g_{\alpha\beta}(x,y)\frac{\delta y^\alpha}{F(x,y)} \otimes \frac{\delta y^\beta}{F(x,y)}$$

definieren. Sie definiert eine Riemann'sche Metrik auf $T\mathcal{M} \setminus 0$.
Wie oben schon angedeutet spielt die Skalierungsinvarianz bezüglich der y-Komponente in der Finsler-Geometrie eine besondere Rolle. Wir definieren daher:

Definition 2.5.
Die Menge $\mathcal{SM} := \{(x,[y]) : (x,y) \in T\mathcal{M}\}$ heißt *Sphärenbündel*, welches aus den Strahlen $(x,[y]) := \{(x,ty) : t > 0\}$ besteht.
Die Menge $I := \{(x,y) \in T\mathcal{M} \setminus 0 : F(x,y) = 1\}$ heißt *Indikatrixbündel*.

Aufgrund der Skalierungsinvarianz sind die Objekte $g_{\alpha\beta}$, $\frac{\delta y^\alpha}{F}$, $\mathcal{G}$ usw. auf $\mathcal{SM}$ sinnvoll. Präziser lässt sich dieser Sachverhalt formulieren, indem wir einen Bezug zwischen $\mathcal{SM}$ und dem Indikatrixbündel I herstellen. Dazu betrachten wir folgenden Diffeomorphismus

$$\iota : \mathcal{SM} \longrightarrow I, \qquad \iota(x,[y]) = \Big(x, \frac{y}{F(x,y)}\Big).$$

Das Indikatrixbündel I ist eine orientierte Hyperfläche in $T\mathcal{M}\setminus 0$. Via ι kann man $\mathcal{SM}$ auch als orientierte $(2m-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $T\mathcal{M} \setminus 0$ auffassen. Insbesondere induziert die Sasaki-Metrik eine Riemann'sche Metrik $\mathcal{G}_{\mathcal{SM}}$ mit einer Volumenform $dV_{\mathcal{SM}}$ auf $\mathcal{SM}$. Da wir im späteren Verlauf der Arbeit fast immer in lokalen Koordinaten rechnen, benötigen wir eine Darstellung der Volumenform $dV_{\mathcal{SM}}$ in lokalen Koordinaten.
Sei $\chi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine lokale Karte von $\mathcal{M}$ mit Koordinaten $(x^1,\dots,x^m)$ und $\mathcal{S}^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$ die $m-1$-dimensionale Einheitssphäre. Wir betrachten die Abbildung

$$\Xi : \Omega \times \mathcal{S}^{m-1} \longrightarrow I \subset T\mathcal{M} \setminus 0, \qquad \Xi(x,\theta) = \Big(x, \frac{y}{F(x,y)}\Big),$$

wobei

$$y = y(x,\theta) := y^\alpha(\theta)\, \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\bigg|_x, \tag{2.1}$$

und y^α die Kartesischen Koordinaten von $\theta \in \mathcal{S}^{m-1}$ sind, d.h.

$$\theta = (y^1(\theta),\dots,y^m(\theta)). \tag{2.2}$$

Damit können wir die folgende Proposition aus [MW, Prop. 2.3] wiedergeben, die es uns erlaubt, Integrale über $\mathcal{SM}$ in lokalen Koordinaten auszudrücken.

Proposition 2.6.
Sei $\chi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ eine lokale Karte von $\mathcal{M}$ und sei $f : \mathcal{SM} \subset T\mathcal{M} \setminus 0 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine integrable Funktion mit Träger in $\pi^{-1}(\Omega)$. Dann gilt

$$\int_{\mathcal{SM}} f(x,y)\, dV_{\mathcal{SM}} = \int_\Omega \bigg(\int_{\mathcal{S}^{m-1}} f\Big(x, \frac{y}{F(x,y)}\Big) \frac{\det g_{\alpha\beta}(x,y)}{F(x,y)^m}\, d\sigma \bigg)\, dx.$$

Hierbei ist $d\sigma$ das Standardvolumenelement auf der $m-1$-dimensionalen Einheitssphäre $\mathcal{S}^{m-1}$, $dx = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m$ und $y = y(x,\theta)$ für $(x,\theta) \in \Omega \times \mathcal{S}^{m-1}$ wie in (2.1) und (2.2) definiert.

In [MW] wird beispielhaft der Fall betrachtet, dass die Finsler-Struktur Riemann'sch ist, d.h. $F^2(x,y) = g_{\alpha\beta}(x)y^\alpha y^\beta$. Für eine integrable Funktion $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ mit Träger in Ω und trivialer Fortsetzung durch 0 auf $\mathcal{SM}$ wird dort die Relation

$$\frac{1}{\mathrm{meas}(\mathcal{S}^{m-1})} \int_{\mathcal{SM}} f \, dV_{\mathcal{SM}} = \int_{\mathcal{M}} f \, dV_{\mathcal{M}} \tag{2.3}$$

gezeigt.

2.3 Harmonische Abbildungen von Finsler-Mannigfaltigkeiten

Sei nun zusätzlich zum vorherigen Abschnitt $(\mathcal{N}, h)$ eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit der Dimension n. Es bezeichnen h_{ij} die Koeffizienten der Metrik h. Sei $U : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ eine hinreichend oft differenzierbare Abbildung. In diesem Abschnitt definieren wir die Energiedichte $e(U)$ der Abbildung U und geben die schwachen Euler-Lagrange-Gleichungen für harmonische Abbildungen von Finsler-Mannigfaltigkeiten an. Wir definieren nun analog zu [MW] die Energiedichte $e(U) : \mathcal{SM} \longrightarrow [0, \infty)$ durch

$$e(U)(x, [y]) := \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(x,y) \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial x^\beta} h_{ij}(u). \tag{2.4}$$

Hierbei ist u eine lokale Darstellung von U bezüglich der Koordinaten (x^α) auf $\mathcal{M}$ und der Koordinaten (u^i) auf $\mathcal{N}$. Die Autoren von [MW] sind bei dieser Definition [Mo] und [SZ] gefolgt.

Die Energie $\mathbf{E}(U)$ der Abbildung U ist damit gegeben durch

$$\mathbf{E}(U) := \frac{1}{\mathrm{meas}(\mathcal{S}^{m-1})} \int_{\mathcal{SM}} e(U) \, dV_{\mathcal{SM}}. \tag{2.5}$$

Die Integration wird bezüglich der Sasaki-Metrik auf $\mathcal{SM}$ durchgeführt. Im Hinblick auf (2.3) fällt diese Definition der Energie mit derjenigen für Riemann'sche Mannigfaltigkeiten zusammen, falls U eine Abbildung zwischen Riemann'schen Mannigfaltigkeiten ist. Die im Folgenden benötigte lokalisierte Energie definieren wir durch die Setzung $\mathbf{E}_\Omega(U) := \mathbf{E}(U|_\Omega)$ für Restriktionen von U auf offene Teilmengen Ω von $\mathcal{M}$.

Wie im Riemann'schen Fall sagen wir, dass $U \in W^{1,2}_{loc}(\Omega, \mathcal{N}) \cap L^\infty(\Omega, \mathcal{N})$ *schwach harmonisch in* $\Omega \subset\subset \mathcal{M}$ ist, falls die erste Variation der lokalisierten Energie $\mathbf{E}_\Omega$ in U verschwindet. Wir nennen U *schwach harmonisch auf* $\mathcal{M}$, wenn U schwach harmonisch für alle $\Omega \subset\subset \mathcal{M}$ ist. Wir definieren dabei den Sobolevraum $W^{1,2}(int(\mathcal{M}), \mathbb{R}^n)$ als denjenigen Raum, der alle messbaren Funktionen $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^n$ enthält, so dass $f \circ \chi^{-1} \in W^{1,2}_{loc}(G, \mathbb{R}^n)$ für alle Karten χ von $\mathcal{M}$ mit $G := Bild(\chi) \subset \overline{E}$. Der Halbraum $E \subset \mathbb{R}^m$ ist in Definition 2.1 definiert worden. In dieser Arbeit betrachten wir ausschließlich Abbildungen, die in einen

regulären Ball $\mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$ abbilden. Es sei an die Tatsache, dass die Komposition einer $W^{1,2}$-Funktion mit einer C^1-Funktion wieder eine $W^{1,2}$-Funktion ist, erinnert. Wir bezeichnen mit $W^{1,2}(int(\mathcal{M}),\mathcal{N}) := W^{1,2}(int(\mathcal{M}),\mathcal{N},\Psi)$ den Raum aller Funktionen $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, deren Bild sich durch eine einzige Karte Ψ, unabhängig von f, parametrisieren lässt und für die $\Psi \circ f \in W^{1,2}(int(\mathcal{M}),\mathbb{R}^n)$ gilt.
Sei nun $\Omega \subset\subset \mathcal{M}$ und $\chi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine lokale Karte von $\mathcal{M}$. Wir setzen $G := \chi(\Omega)$. Aus (2.5) und Proposition 2.6 folgt, dass die Energie $\mathbf{E}$ in lokalen Koordinaten gegeben ist durch das quadratische Funktional

$$\mathbf{E}_\Omega(U) = \frac{1}{2}\int_G A^{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial u^j}{\partial x^\beta}h_{ij}(u)\,dx,$$

wobei

$$A^{\alpha\beta}(x) = \fint_{\mathcal{S}^{m-1}} g^{\alpha\beta}(x,y)\frac{\det g_{\alpha\beta}(x,y)}{F(x,y)^m}\,d\sigma. \tag{2.6}$$

Wir untersuchen nun die Differenzierbarkeit von $x \mapsto A^{\alpha\beta}(x)$. Per Definition der Finsler-Struktur ist $x \mapsto F(x,y)$ differenzierbar, denn nach der Definition von Ξ im vorherigen Abschnitt ist hier $(x,y) \in T\mathcal{M} \setminus 0$. Weiter ist $x \mapsto \det g_{\alpha\beta}(x,y)$ als Polynom in $g_{\alpha\beta}(x,y)$ differenzierbar. Man kann die Inverse $g^{\alpha\beta}$ von $g_{\alpha\beta}$ über die adjungierte Matrix berechnen. Es stellt sich heraus, dass die Einträge von $g^{\alpha\beta}(x,y)$ gebrochen rationale Funktionen in $g_{\alpha\beta}(x,y)$ mit Nenner $\det g_{\alpha\beta}(x,y) > 0$ sind, mithin differenzierbar bezüglich x. Also haben wir in (2.6) einen stetig differenzierbaren Integranden. Für die Differenzierbarkeit von $x \mapsto A^{\alpha\beta}(x)$ betrachten wir nun einen Punkt $x_0 \in V \subset\subset G$, wobei V eine offene Menge ist. Die stetige Ableitung des Integranden ist insbesondere auf $\overline{V}$ beschränkt. Das endliche Maß der Einheitssphäre $\mathcal{S}^{m-1}$ liefert dann zusammen mit der Beschränktheit eine integrable Majorante auf V. Ein Satz über die Differenzierbarkeit parameterabhängige Integrale liefert schließlich die Differenzierbarkeit von $x \mapsto A^{\alpha\beta}(x)$ auf V. Da $x_0 \in G$ beliebig war, haben wir die gewünschte Differenzierbarkeitseigenschaft hergeleitet. Dies erweist sich bei den Abschätzungen in Kapitel 4 und Kapitel 5 als nützlich. Höhere Differenzierbarkeit erhalten wir mit genau der gleichen Argumentation, da wir aus der Definition der Finsler-Struktur die Regularität von F und damit auch von $g_{\alpha\beta}$ und $g^{\alpha\beta}$ kennen.
Den Autoren von [MW] folgend formulieren wir die schwachen Euler-Lagrange-Gleichungen von $\mathbf{E}$:

$$\int_G A^{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^\beta}\,dx = \int_G \Gamma^l_{ij}(u)A^{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial u^j}{\partial x^\beta}\varphi^l\,dx \tag{2.7}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(G,\mathbb{R}^n)$. Mit Γ^l_{ij} bezeichnen wir die Christoffelsymbole der Riemann'schen Metrik h. Wir erinnern an unsere Konvention $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ mit D_α abzukürzen. Damit setzen wir

$$\begin{aligned} f^l(v) &:= \Gamma^l_{ij}(v)A^{\alpha\beta}(x)D_\alpha v^i D_\beta v^j, \\ \mathbf{E}(v) &:= A^{\alpha\beta}(x)D_\alpha v^i D_\beta v^j h_{ij}(v), \\ &\text{und} \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(v) \quad := \quad A^{\alpha\beta}(x) D_\alpha v^l D_\beta v^l - f^l(v) v^l.$$

Nehmen wir nun an, dass die Komponenten $g_{\alpha\beta}$ der Finsler-Metrik die Elliptizitätsbedingung

$$\lambda |\xi|^2 \leq g_{\alpha\beta}(x,y)\xi^\alpha \xi^\beta \leq \mu |\xi|^2$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^m$ und für alle $(x,y) \in T\mathcal{M}\setminus 0$ mit Konstanten $0 < \lambda \leq \mu < \infty$ erfüllen. Dann gilt auch die folgende Strukturbedingung für Gleichung (2.7):

$$\lambda^* |\xi|^2 \leq A^{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha \xi_\beta \leq \mu^* |\xi|^2 \tag{2.8}$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^m$ und für alle $x \in G$ mit

$$\lambda^* = \frac{\lambda^m}{\mu^{1+\frac{m}{2}}}, \qquad \mu^* = \frac{\mu^m}{\lambda^{1+\frac{m}{2}}}.$$

Wir bemerken, dass (2.8) gilt, falls $\mathcal{M}$ kompakt ist.

2.4 Jacobi-Feld Abschätzungen

In diesem Abschnitt wollen wir Abschätzungen angeben, die uns helfen, die Nichtlinearitäten in (2.7) zu kontrollieren. Außerdem geben wir einige wichtige Resultate über bestimmte Koordinatenwahlen, die unsere Abschätzungen in der Hinsicht „verschönern", dass weniger geometrische Parameter in die Konstanten einfließen. Genauer hängen unsere Konstanten nicht mehr von den kovarianten Ableitungen der Krümmung $\mathbf{K}_\mathcal{N}$ von $\mathcal{N}$ ab, sondern nur noch von den Krümmungsschranken selbst.
Folgendes Lemma stellt sich als essentielles Hilfsmittel heraus, denn es erlaubt uns die Einführung von Normalkoordinaten um jeden Punkt $\mathcal{P}$ aus $\mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$, die um $\mathcal{P}$ zentriert sind, zur Definition des Begriffs Normalkoordinaten siehe z.B. [J2, Def. 1.4.4].

Lemma 2.7.
Es gelte $L < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$, und es sei $\mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$, $\mathcal{Q} \in \mathcal{N}$, ein regulärer Ball. Dann gibt es zu je zwei Punkten $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ aus $\mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$ genau eine ganz in $\mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$ verlaufende geodätische Verbindungskurve der Länge $dist_\mathcal{N}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$, wobei $dist_\mathcal{N}(\cdot,\cdot)$ die Abstandsfunktion der Riemann'schen Metrik auf $\mathcal{N}$ ist. Die Geodätische ist außerdem frei von Paaren konjugierter Punkte.

Beweis. siehe [J2]. □

Also können wir eine „Normalkarte" $\Psi : \mathcal{B}_L(\mathcal{Q}) \to \mathbb{R}^n$ für jeden Punkt $\mathcal{P} \in \mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$, die auf $\mathcal{P}$ zentriert ist, einführen. Wir bezeichnen mit $(v^1, \ldots, v^n)$ die zu Ψ gehörenden Normalkoordinaten. Dann bezeichnen wir mit $h_{ij}(v)$ die Koeffizienten des metrischen Tensors auf $\mathcal{N}$ bezüglich der Karte Ψ. Weiterhin seien $\Gamma^l_{ik}(v)$ die zugehörigen Christoffelsymbole zweiter Art. Der Punkt $\mathcal{P}$ hat dann die Koordinaten $(0,\ldots,0)$ und für $\mathcal{P}' \in \mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$ mit Koordinaten v gilt für $|v|^2 := v^i v^i$ die Identität $|v| = \operatorname{dist}_{\mathcal{N}}(\mathcal{P}',\mathcal{P}) \le 2L < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$. Speziell gilt für Normalkoordinaten $(u^1,\ldots,u^n)$ zentriert um $\mathcal{Q}$ die Ungleichung $|u| \le L < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$. Es erweisen sich folgende Hilfsfunktionen bei unseren Abschätzungen als nützlich

$$a_\sigma(t) := \begin{cases} t\sqrt{\sigma}\cot(t\sqrt{\sigma}), & \text{wenn } \sigma > 0,\ 0 \le t < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}, \\ t\sqrt{-\sigma}\coth(t\sqrt{-\sigma}), & \text{wenn } \sigma \le 0,\ 0 \le t < \infty, \end{cases}$$

$$b_\sigma(t) := \begin{cases} \frac{\sin(t\sqrt{\sigma})}{t\sqrt{\sigma}}, & \text{wenn } \sigma > 0,\ 0 \le t < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}, \\ \frac{\sin(t\sqrt{-\sigma})}{t\sqrt{-\sigma}}, & \text{wenn } \sigma \le 0,\ 0 \le t < \infty. \end{cases}$$

Wir bemerken, dass b_ω und a_ω streng monoton steigend und b_κ sowie a_κ streng monoton fallend sind. Außerdem gilt $a_\kappa(\frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}) = 0$. Mit diesen Festlegungen können wir als Folgerungen aus den Rauch'schen Vergleichssätzen folgende Abschätzungen für die Christoffel-Symbole formulieren.

Lemma 2.8.
Seien $(v^1,\ldots,v^n)$ Normalkoordinaten auf $\mathcal{N}$ mit einer beliebigen Normalkarte $\Psi_{\mathcal{Q}}$ um $\mathcal{Q}$, so dass $\mathcal{Q}$ die Koordinaten $(0,\ldots,0)$ hat. Weiter erfülle die Schnittkrümmung $\boldsymbol{K}_{\mathcal{N}}$ von $\mathcal{N}$ die Abschätzung $\omega \le \boldsymbol{K}_{\mathcal{N}} \le \kappa$ für $-\infty < \omega \le 0 \le \kappa < \infty$. Dann gelten für alle v mit $|v| < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ und für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ die folgenden Abschätzungen

$$\{\delta_{ij} - a_\omega(|v|)h_{ij}(v)\}\xi^i\xi^j \le \Gamma^l_{ij}(v)v^l\xi^i\xi^j \le \{\delta_{ij} - a_\kappa(|v|)h_{ij}(v)\}\xi^i\xi^j, \tag{2.9}$$

$$b^2_\kappa(|v|)|\xi|^2 \le h_{ij}(v)\xi^i\xi^j \le b^2_\omega(|v|)|\xi|^2. \tag{2.10}$$

Beweis. siehe [HKW2, Lemma 1]. □

Als Konsequenz von (2.9) und (2.10) erhalten wir für jede positiv semi-definite Matrix $(A^{\alpha\beta}) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und für jede Matrix $(\xi^i_\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, vgl. [MW, Formel (4.3), (4.4)],

$$\begin{aligned} A^{\alpha\beta}\xi^i_\alpha\xi^j_\beta - a_\omega(|v|)A^{\alpha\beta}\xi^i_\alpha\xi^j_\beta h_{ij}(v) &\le \Gamma^l_{ij}(v)v^l A^{\alpha\beta}\xi^i_\alpha\xi^j_\beta \\ &\le A^{\alpha\beta}\xi^i_\alpha\xi^j_\beta - a_\kappa(|v|)A^{\alpha\beta}\xi^i_\alpha\xi^j_\beta h_{ij}(v), \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$b^2_\kappa(|v|)A^{\alpha\beta}\xi^i_\alpha\xi^j_\beta \le A^{\alpha\beta}\xi^i_\alpha\xi^j_\beta h_{ij}(v) \le b^2_\omega(|v|)A^{\alpha\beta}\xi^i_\alpha\xi^j_\beta. \tag{2.12}$$

Als Folgerung aus (2.11) ergibt sich die folgende Abschätzung

$$a_\kappa(|v|)\mathbf{E}(v) \le \mathbf{P}(v). \tag{2.13}$$

Die Größen $\mathbf{E}(v)$ und $\mathbf{P}(v)$ haben wir im vorherigen Abschnitt definiert.
Statt des in (2.11) auftauchenden Terms $\Gamma^l_{ij}(v)v^l A^{\alpha\beta}\xi^i_\alpha\xi^j_\beta$ werden wir im Verlauf der Arbeit auch den Term $\Gamma^l_{ij}(v)A^{\alpha\beta}\xi^i_\alpha\xi^j_\beta$ abschätzen müssen. Hierfür führen wir die aus Kompaktheitsgründen wohldefinierte Zahl Γ_0 als das Infimum aller Zahlen Γ ein, für die die Ungleichung

$$|\Gamma^l_{ik}(u)\xi^i\xi^k\eta_l| \le \Gamma|\xi|^2|\eta| \qquad \text{für alle } u \in \mathcal{B}_L(\mathcal{Q}) \text{ und für alle } \xi, \eta \in \mathbb{R}^n,$$

gilt, wobei u Normalkoordinaten um $\mathcal{Q}$ seien und $\Gamma^l_{ik}(u)$ die dazugehörigen Christoffel-Symbole. Die Zahl Γ_0 kann in Termen der kovarianten Ableitungen des Riemann'schen Krümmungstensors auf $\mathcal{N}$ abgeschätzt werden, vgl. mit der Bemerkung in [HKW2, Seite 4] bzw. mit den Resultaten aus [Ka]. Damit folgt

$$|\Gamma^l_{ij}(u)A^{\alpha\beta}\xi^i_\alpha\xi^j_\beta\eta_l| \le \mu^*\Gamma_0|\xi|^2|\eta| \tag{2.14}$$

für alle $u \in \mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$, $\xi \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $\eta \in \mathbb{R}^n$. Zur Erlangung von a-priori Abschätzungen können wir uns mit der Konstanten Γ_0 zufrieden geben. Eine geometrisch einfachere Abhängigkeit der Konstanten von der Geometrie des Gebietes ergibt sich, wenn nur Abhängigkeiten von den Krümmungsschranken von $\mathbf{K}_\mathcal{N}$ auftreten. Dies können wir durch eine andere Wahl von Koordinaten erreichen. Das folgende Resultat wurde in [JK2] hergeleitet.

Lemma 2.9.
Sei $\mathcal{N}$ eine vollständige Riemann'sche Mannigfaltigkeit der Dimension n. Es bezeichne $\boldsymbol{K}_\mathcal{N}$ die Schnittkrümmung von $\mathcal{N}$. Weiterhin sei $\mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$ eine Kugel in $\mathcal{N}$ mit Radius L und Mittelpunkt $\mathcal{Q}$ und mit den Krümmungsschranken

$$\omega = \min(0, \inf_{\mathcal{B}_L(\mathcal{Q})} \boldsymbol{K}_\mathcal{N}), \quad \kappa = \max(0, \sup_{\mathcal{B}_L(\mathcal{Q})} \boldsymbol{K}_\mathcal{N}).$$

Dann existieren eine Zahl L' abhängig von L und n mit $L' \le L$, eine Zahl $\Gamma_0 > 0$ abhängig von L, n, ω, κ und eine Karte

$$u = \Psi(\mathcal{P}), \qquad \mathcal{P} \in \mathcal{B}_{L'}(\mathcal{Q}),$$

auf $\mathcal{B}_{L'}(\mathcal{Q})$, so dass $\Psi(\mathcal{Q}) = 0$, und so dass

$$|\Gamma^l_{ik}(u)\xi^i\xi^k\eta_l| \le \Gamma_0|\xi|^2|\eta| \qquad \textit{für alle } u \in \mathcal{B}_{L'}(\mathcal{Q}) \textit{ und für alle } \xi, \eta \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $\Gamma^l_{ik}(u)$ die Christoffel-Symbole zweiter Art für die Komponenten $h_{ij}(u)$ des Fundamental Tensors bezüglich der Karte Ψ sind. Weiter existiert eine Zahl $c = c(n, \omega, \kappa)$, so dass

$$|h_{ik}(u) - \delta_{ik}| \le c \;\; dist_\mathcal{N}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}),$$

wobei $u = \Psi(\mathcal{P})$.

Die Koordinaten aus Lemma 2.9 werden auch *Karcher*-Koordinaten genannt. Auf ihre Verwendung werden wir später genauer eingehen.
Folgendes Lemma stellt eine Verbindung zwischen dem euklidischen Abstand und dem Abstand auf der Riemann'schen Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ her und findet in Kapitel 4 Verwendung.

Lemma 2.10.
Seien $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ zwei Punkte in $\mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$ mit den Koordinaten p_1 und p_2. Dann gelten die Abschätzungen

$$b_\kappa(L)|p_1 - p_2| \leq \; dist_{\mathcal{N}}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) \leq b_\omega(L)|p_1 - p_2|.$$

Beweis. siehe [Pi, Lemma 2.7]. □

Ein weiteres essentielles Hilfsmittel ist das kürzlich in [MW] hergeleitete Resultat:

Lemma 2.11 (Sublösung und lokale Energieabschätzung)**.**
Sei v eine Darstellung von U in Normalkoordinaten um $\mathcal{P} \in \mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$.

(i) (Sublösung) Falls $|v| < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$ auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^m$. Dann gilt

$$D_\alpha(A^{\alpha\beta}(x)D_\beta|v|^2) \geq 0 \text{ in } G.$$

(ii) (Lokale Energieabschätzung) Falls $|v| \leq L$ auf $B_{4R}(x_0) \subset B_{4d}(0) \subset \mathbb{R}^m$, dann gilt

$$R^{2-m} \int_{B_R(x_0)} \boldsymbol{E}(v)\, dx \leq C \left[M^2(4R) - M^2(R)\right],$$

wobei

$$M(r) := \sup_{B_r(x_0)} |v|, \qquad 0 \leq r \leq 4R.$$

Die Konstante C hängt nur von m, λ, μ, κ und L ab.

Beweis. siehe [MW, Lemma 4.1]. □

Weitere für uns relevante Resultate aus [MW] fassen wir im folgenden Satz zusammen.

Satz 2.12.
Sei $(\mathcal{M}, F)$ eine Finsler-Mannigfaltigkeit mit Rand und $(\mathcal{N}, h)$ eine vollständige, unberandete Riemann'sche Mannigfaltigkeit. Sei $\chi : \Omega \to B_{4d}$ eine lokale Karte von $\mathcal{M}$. Es gelte für die Komponenten der Finsler-Metrik $g_{\alpha\beta}(x, y)$ die Strukturbedingung

$$\lambda|\xi|^2 \leq g_{\alpha\beta}(x, y)\xi^\alpha\xi^\beta \leq \mu|\xi|^2$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^m$ und für alle $(x,y) \in T\mathcal{M} \setminus 0$ mit Konstanten $0 < \lambda \leq \mu < \infty$. Weiterhin sei $\mathcal{B}_L(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{N}$ ein regulärer Ball. Schließlich sei $U : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ eine schwach harmonische Abbildung mit $U(\Omega) \subset \mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$. Bezeichne mit u eine Darstellung von U bezüglich χ und Normalkoordinaten Ψ um $\mathcal{Q}$, d.h. $u = \Psi \circ U \circ \chi^{-1}$. Dann ist U hölderstetig und es gilt die Abschätzung

$$Höl_{\alpha,B_d} u := \sup_{\substack{x,y \in B_d \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C d^{-\alpha}$$

mit Konstanten $0 < \alpha < 1$ und $C > 0$, die nur von m, λ, μ, L, ω und κ, aber nicht von $d > 0$ abhängen.
Insbesondere ist U stetig im Innern von $\mathcal{M}$. Weiterhin existiert eine Zahl i_1 abhängig von m, λ, μ, L, ω und κ, so dass für alle Bälle $B_{4R}(x_0) \subset B_{4d}$ und für $\tilde{R} := 4^{-i_1} R$ gilt:

$$\operatorname*{osc}_{B_{\tilde{R}}(x_0)} u \leq \frac{L}{b_\omega(L)}.$$

Beweis. siehe [MW, Thm. 1.1] und den zugehörigen Beweis. □

2.5 $C^{2,\alpha}$-a-priori Abschätzung

Wir nehmen nun weiterhin an, dass die Finsler-Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ kompakt ist und einen (regulären) Rand besitzt. Außerdem sei die Riemann'sche Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ von der Klasse C^3. Für einen endlichen Atlas (χ_i, Ω_i), $i = 1, \ldots, k$, von $\mathcal{M}$, für $\alpha \in (0,1)$ und für einen regulären Ball $\mathcal{B}_L(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{N}$ mit Karte $\Psi : \mathcal{B}_L(\mathcal{Q}) \to \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$\|U\|_{C^{2,\alpha}(\mathcal{M},\mathcal{N})} := \sum_{j=1}^{k} \|u_j\|_{C^{2,\alpha}(\chi(\Omega_j),\mathbb{R}^n)},$$

wobei $u_j = \Psi \circ U \circ \chi_j^{-1}$, $j = 1, \ldots, k$, eine Darstellung von $U : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ ist. Wir sagen, dass $U \in C^{2,\alpha}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ ist, wenn $\|U\|_{C^{2,\alpha}(\mathcal{M},\mathcal{N})} < \infty$. Damit geben wir neben dem Existenssatz 1.1 unser zweites Hauptresultat:

Satz 2.13.
Sei $\mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$ ein regulärer Ball und $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{B}_L(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{N}$ eine gegebene Abbildung der Klasse $C^{2,\alpha_0}(\mathcal{M},\mathcal{N})$, $\alpha_0 \in (0,1)$. Dann existiert eine Zahl $\mathcal{K} > 0$, die nur abhängig ist von $m, n, L, \kappa, \omega, \alpha_0, \|\Phi\|_{C^{2,\alpha_0}(\mathcal{M},\mathcal{N})}$, der Finsler-Struktur von $\mathcal{M}$ und der Riemann'schen Metrik von $\mathcal{N}$ und eine Zahl α, die nur von $m, \mu, \lambda, \kappa, \omega, \alpha_0$ und L abhängt, so dass

$$\|U\|_{C^{2,\alpha}(\mathcal{M},\mathcal{N})} \leq \mathcal{K}$$

für jede (schwach) harmonische Abbildung $U : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ mit $U(\mathcal{M}) \subset \mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$ und mit $U|_{\partial\mathcal{M}} = \Phi|_{\partial\mathcal{M}}$ gilt.

Der Beweis dieses Satzes gliedert sich, wie in der Einleitung beschrieben, in die oben genannten Resultate von [MW] über die Stetigkeit und lokale Hölderstetigkeit, der globalen Stetigkeit, Satz 3.1, und globalen Hölderstetigkeit in Kapitel 3, Satz 3.4, der inneren Hölderstetigkeit des Gradienten in Kapitel 4, Satz 4.5, der globalen Hölderstetigkeit des Gradienten in Kapitel 5, Satz 5.4, und der $C^{2,\alpha}$-Regularität in Kapitel 6.
In Kapitel 7 beweisen wir den in der Einleitung gegebenen Existenzsatz, Satz 1.1, mit Hilfe von Satz 2.13. Abschließend bemerken wir:

Bemerkung 2.14.
Damit die Konstanten möglichst einfach von den geometrischen Daten des Problems abhängen, können wir Lemma 2.9 verwenden, um ein $L' \leq L$ zu erhalten, welches schon durch L und n bestimmt ist. Wir formulieren die beiden Hauptresultate dann für $\mathcal{B}_{L'}(\mathcal{Q})$ statt für $\mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$. An den Stellen, an denen diese Wahl der Koordinaten eingeht, werden wir nochmals darauf hinweisen. Diese Stellen sind genauer zum einen die Herleitung von (4.18) und zum anderen die Herleitung von (5.11).

Kapitel 3

Stetigkeit und Hölderabschätzungen am Rand

3.1 Stetigkeit

In diesem Abschnitt beweisen wir die Stetigkeit schwach harmonischer Abbildungen, deren Bild in einem regulären Ball liegen. Wir benutzen die Stetigkeit, um Hölderabschätzungen harmonischer Abbildungen am Rand der Finsler-Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ zu beweisen. Der folgende Satz wurde schon in [HKW2, Thm. 4] für den Fall, dass das Urbild eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit ist, in ähnlicher Weise formuliert. Allerdings verzichten wir hier im Beweis auf den Gebrauch von Green'schen Funktionen und verwenden Ergebnisse, die kürzlich in [MW] hergeleitet wurden.

Satz 3.1.
Sei $U \in W^{1,2}(int(\mathcal{M}), \mathcal{N})$ eine schwach harmonische Abbildung, die in einen regulären Ball $\mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$ abbilde. Wenn die Spur von U auf ∂M stetig ist, dann ist U stetig auf $\mathcal{M}$, d.h. $U \in C^0(\mathcal{M}, \mathcal{N})$.

Beweis. Die Stetigkeit von U in $int(\mathcal{M})$ wurde schon in [MW] bewiesen, siehe Satz 2.12. Es verbleibt also, die Stetigkeit von U auf $\partial\mathcal{M}$ zu zeigen. Sei Ω eine Umgebung eines Punktes $\mathcal{P} \in \partial\mathcal{M}$. Weiter sei χ eine Karte, die $\overline{\Omega}$ homöomorph auf $\overline{\Sigma_{5d}}$ abbildet, so dass $\chi(\partial\mathcal{M} \cap \overline{\Omega}) = \Sigma^0_{5d}$ ist und $\mathcal{P}$ die Koordinaten $(0, \ldots, 0)$ hat. Sei im Folgenden $x_0 \in \Sigma^0_d(0)$. Nach Lemma 2.7 existiert zu je zwei Punkten aus $\mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$ genau eine ganz in $\mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$ verlaufende Geodätische und diese ist unter allen Verbindungskurven die kürzeste. Sei $\gamma : [0,1] \to \mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$ die Geodätische, die $\mathcal{Q}$ mit $U(\chi^{-1}(x_0))$ in $\mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$ verbindet. Nach [J2, Lemma 1.4.5] sind Geodätische nach Bogenlänge parametrisiert. Mit $\mathcal{Q}_t := \gamma(t)$ erhalten wir somit

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{N}}(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}_t) = t\, dist(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}_1). \tag{3.1}$$

Für jedes t und jedes hinreichend kleine, im Beweis noch zu wählende R, betrachten wir die Randwertaufgabe

$$-D_\alpha(A^{\alpha\beta}(x) D_\beta w_{t,R}) = 0 \qquad \text{in } S_R(x_0), \tag{3.2}$$

$$w_{t,R} - |v_t|^2 \quad \in W_0^{1,2}(S_R(x_0)). \tag{3.3}$$

Hierbei sei v_t die Darstellung von U in Normalkoordinaten um $\mathcal{Q}_t$, insbesondere gilt also $|v_t(y)|^2 = \operatorname{dist}^2_{\mathcal{N}}(U(\chi^{-1}(y)), \mathcal{Q}_t)$. Einen Beweis der eindeutigen Lösbarkeit dieser linearen elliptischen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung findet man z.B. in [GT, Thm. 8.3]. Für die Lösung $w_{t,R}$ gilt nach [GT, Thm. 8.27] für alle $0 < r \leq R$ und $y \in \Sigma^0_R(x_0)$

$$\operatorname*{osc}_{S_R(x_0)\cap B_r(y)} w_{t,R} \leq c\Big[r^\alpha R^{-\alpha} \sup_{S_R(x_0)\cap B_R(y)} |w_{t,R}| + \sigma(\sqrt{r\,R})\Big]$$

mit Konstanten $\alpha = \alpha(m, \lambda, \mu)$ und $c = c(m, \lambda, \mu, R)$ und

$$\sigma(r) = \operatorname*{osc}_{\partial S_R(x_0)\cap B_r(y)} w_{t,R} = \operatorname*{osc}_{\partial S_R(x_0)\cap B_r(y)} |v_t|^2.$$

Die letzte Gleichheit gilt wegen $w_{t,R} - |v_t|^2 \in W_0^{1,2}(S_R(x_0))$. Für r klein genug gilt $\partial S_R(x_0) \cap B_r(y) \subset \Sigma^0_R(x_0)$. Damit und wegen der Voraussetzung $|v_t|^2 \in C^0(\Sigma^0_{5d}(0))$ folgt: $\sigma(\rho) \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0$. Hieraus schließen wir:

$$\operatorname*{osc}_{S_R(x_0)\cap B_r(y)} w_{t,R} \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Also ist $\lim\limits_{\substack{x\to y\\ x\in\Sigma_R(x_0)}} w_{t,R}(x) = w_{t,R}(y)$ wohldefiniert, und $w_{t,R}$ ist stetig in jedem Punkt aus $\Sigma^0_R(x_0)$. Damit ergibt sich die Identität

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Sigma_R(x_0)}} w_{t,R}(x) = w_{t,R}(x_0) = |v_t(x_0)|^2 = \operatorname{dist}^2_{\mathcal{N}}(U(\chi^{-1}(x_0)), \mathcal{Q}_t). \tag{3.4}$$

Zu beliebigem $y \in S_R(x_0)$ mit $B_\rho(y) \subset S_R(x_0)$ betrachten wir die nach [GT, Thm. 8.3] eindeutige Lösung $\theta \in W_0^{1,2}(S_R(x_0))$ von

$$\int_{S_R(x_0)} A^{\alpha\beta}(x) D_\alpha\varphi D_\beta\theta\, dx = \fint_{B_\rho(y)} \varphi\, dx \qquad \text{für alle } \varphi \in W_0^{1,2}(S_R(x_0)). \tag{3.5}$$

Insbesondere ist θ also eine Superlösung des Operators $D_\alpha(A^{\alpha\beta} D_\beta)$. Wir folgern aus dem schwachen Maximumprinzip, siehe [GT, Thm. 8.1],

$$\inf_{S_R(x_0)} \theta \geq 0. \tag{3.6}$$

Setzen wir $\varphi := v_t\eta$ für $\eta \in C_0^\infty(S_R(x_0))$ mit $\eta \geq 0$ als Testfunktion in die schwachen Euler-Lagrange-Gleichungen (2.7) ein, so erhalten wir folgende Identität

$$\int_{S_R(x_0)} A^{\alpha\beta}(x) D_\alpha |v_t|^2 D_\beta \eta \, dx = -2 \int_{S_R(x_0)} \mathbf{P}(v_t)\eta \, dx \tag{3.7}$$

für alle $\eta \in C_0^\infty(S_R(x_0))$, $\eta \geq 0$ und durch Approximation auch für alle $\eta \in W_0^{1,2}(S_R(x_0))$ mit $\eta \geq 0$ L^m-f.ü. in $S_R(x_0)$. Wir setzen nun in die schwachen Formulierung von (3.2) θ als Testfunktion ein:

$$\int_{S_R(x_0)} A^{\alpha\beta}(x) D_\alpha w_{t,R} D_\beta \theta \, dx = 0.$$

Diese Gleichung subtrahieren wir nun von (3.7) mit $\eta := \theta$, was auf die Gleichung

$$\int_{S_R(x_0)} A^{\alpha\beta}(x) D_\alpha (|v_t|^2 - w_{t,R}) D_\beta \theta \, dx = -2 \int_{S_R(x_0)} \theta \mathbf{P}(v_t) \, dx$$

führt. Wir schätzen diese Identität jetzt ab, indem wir in die Integralgleichung (3.5) $\varphi := |v_t|^2 - w_{t,R} \in W_0^{1,2}(S_R(x_0))$ als gültige Testfunktion einsetzen und die Abschätzung $a_\kappa(|v_t|)\mathbf{E}(v_t) \leq \mathbf{P}(v_t)$, siehe (2.13), zusammen mit (3.6) benutzen:

$$\begin{aligned}
& \fint_{B_\rho(y)} \left(|v_t|^2 - w_{t,R}\right) \, dx \\
\underset{(3.5)}{=} \;& \int_{S_R(x_0)} A^{\alpha\beta}(x) D_\alpha (|v_t|^2 - w_{t,R}) D_\beta \theta \, dx \\
= \;& -2 \int_{S_R(x_0)} \theta \mathbf{P}(v_t) \, dx \\
\leq \;& -2 \int_{S_R(x_0)} a_\kappa(|v_t|) \mathbf{E}(v_t) \theta \, dx.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir aufgrund der im zweiten Kapitel bemerkten Monotonie von $s \mapsto a_\kappa(s)$ die im weiteren Verlauf dieses Beweises wichtige Ungleichung:

$$\fint_{B_\rho(y)} \left(|v_t|^2 - w_{t,R}\right) \, dx \leq -2 a_\kappa\big(\sup_{S_R(x_0)} |v_t|\big) \int_{S_R(x_0)} \mathbf{E}(v_t)\theta \, dx. \tag{3.8}$$

Da $\mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$ ein regulärer Ball ist, können wir ein $L_1 \in \mathbb{R}$ mit $\frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}} > L_1 > L$ wählen, so dass insbesondere $a_\kappa(L_1) > 0$ gilt.

Wir definieren die Funktion $\vartheta : [0,1] \to \mathbb{R}\,, t \mapsto \limsup_{x \to x_0} |v_t(x)|$. Zur Wohldefiniertheit von ϑ bemerken wir, dass $|v_t(x)| = \operatorname{dist}_{\mathcal{N}}(U \circ \chi^{-1}(x), \mathcal{Q}_t) \leq 2L$ für alle $x \in \Sigma_d(0)$.

<u>*Beh.:*</u> *ϑ ist Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante* $\operatorname{dist}_{\mathcal{N}}(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}_1)$.

Dazu machen wir mit Hilfe der Dreiecksungleichung für die Metrik $\operatorname{dist}_{\mathcal{N}}(\cdot,\cdot)$, vgl. [J2, Lemma 1.4.1], folgende Überlegung für $t_1 \leq t_2 \in [0,1]$ und $x \in \Sigma_d(0)$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}_{\mathcal{N}}(U(\chi^{-1}(x)), \mathcal{Q}_{t_2}) &+ \operatorname{dist}_{\mathcal{N}}(\mathcal{Q}_{t_2}, \mathcal{Q}_{t_1}) \geq \operatorname{dist}_{\mathcal{N}}(U(\chi^{-1}(x)), \mathcal{Q}_{t_1}) \text{ und} \\
\operatorname{dist}_{\mathcal{N}}(U(\chi^{-1}(x)), \mathcal{Q}_{t_1}) &+ \operatorname{dist}_{\mathcal{N}}(\mathcal{Q}_{t_1}, \mathcal{Q}_{t_2}) \geq \operatorname{dist}_{\mathcal{N}}(U(\chi^{-1}(x)), \mathcal{Q}_{t_2}).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\left|\operatorname{dist}_{\mathcal{N}}(U(\chi^{-1}(x)),\mathcal{Q}_{t_2}) - \operatorname{dist}_{\mathcal{N}}(U(\chi^{-1}(x)),\mathcal{Q}_{t_1})\right| \\
\leq\ & \operatorname{dist}_{\mathcal{N}}(\mathcal{Q}_{t_2},\mathcal{Q}_{t_1}) \\
\underset{(*)}{=}\ & \operatorname{dist}_{\mathcal{N}}(\mathcal{Q}_{t_2},\mathcal{Q}) - \operatorname{dist}_{\mathcal{N}}(\mathcal{Q}_{t_1},\mathcal{Q}) \\
\underset{(3.1)}{=}\ & t_2 \operatorname{dist}_{\mathcal{N}}(\mathcal{Q}_1,\mathcal{Q}) - t_1 \operatorname{dist}_{\mathcal{N}}(\mathcal{Q}_1,\mathcal{Q}) \\
=\ & |t_2 - t_1| \operatorname{dist}_{\mathcal{N}}(\mathcal{Q}_1,\mathcal{Q})
\end{aligned}$$

Zu $(*)$ bemerken wir, dass für $t \in [0,1]$ die Punkte $\mathcal{Q}_t$ alle auf der Geodätischen γ liegen. Somit gilt weiter:

$$\begin{aligned}
\big||v_{t_2}(x)| - |v_{t_1}(x)|\big| &= \left|\operatorname{dist}_{\mathcal{N}}(U(\chi^{-1}(x)),\mathcal{Q}_{t_2}) - \operatorname{dist}_{\mathcal{N}}(U(\chi^{-1}(x)),\mathcal{Q}_{t_1})\right| \\
&\leq |t_2 - t_1| \operatorname{dist}_{\mathcal{N}}(\mathcal{Q}_1,\mathcal{Q}).
\end{aligned}$$

Schließlich liefern uns die bekannten Rechenregeln für lim sup und lim inf:

$$\begin{aligned}
&|\vartheta(t_2) - \vartheta(t_1)| \\
=\ & \left|\limsup_{x\to x_0} |v_{t_2}(x)| - \limsup_{x\to x_0} |v_{t_1}(x)|\right| \\
=\ & \left|\limsup_{x\to x_0} |v_{t_2}(x)| + \liminf_{x\to x_0} (-|v_{t_1}(x)|)\right| \\
\leq\ & \left|\limsup_{x\to x_0} (|v_{t_2}(x)| - |v_{t_1}(x)|)\right| \\
\leq\ & \limsup_{x\to x_0} (|t_2 - t_1| \operatorname{dist}_{\mathcal{N}}(\mathcal{Q}_1,\mathcal{Q})) \\
=\ & |t_2 - t_1| \operatorname{dist}_{\mathcal{N}}(\mathcal{Q}_1,\mathcal{Q}).
\end{aligned}$$

Damit ist die Lipschitzstetigkeit von ϑ gezeigt.

Wir behaupten weiter, dass $\vartheta(t) \leq L_1$ für alle $t \in [0,1]$ gilt.

Angenommen dies ist nicht so, dann existiert wegen $\vartheta(0) \leq L$ ein $t_0 > 0$ mit $\vartheta(t_0) = L_1$. Folglich gilt für ein hinreichend kleines R die Ungleichung $a_\kappa(\sup_{S_R(x_0)} |v_{t_0}|) > 0$, da

$$\frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}} > L_1 = \vartheta(t_0) = \limsup_{y\to x_0} |v_{t_0}(y)| = \lim_{R\to 0} \sup_{S_R(x_0)} |v_{t_0}(y)|.$$

Damit ist die rechte Seite der Integralungleichung (3.8) nicht positiv, also die linke Seite kleiner oder gleich Null. Betrachten wir den Grenzprozess $\rho \to 0$, so erhalten wir aus den Konvergenzeigenschaften des Mittelwertintegrals

$$|v_{t_0}(y)|^2 \leq w_{t_0,R}(y) \qquad \text{für fast alle } y \in S_R(x_0).$$

Kombinieren wir diese Ungleichung mit der Identität (3.4), so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\vartheta^2(t_0) \leq \limsup_{y\to x_0} w_{t_0,R}(y) &= \operatorname{dist}^2_{\mathcal{N}}(U(\chi^{-1}(x_0)),\mathcal{Q}_{t_0}) \\
&\leq \operatorname{dist}^2_{\mathcal{N}}(U(\chi^{-1}(x_0)),\mathcal{Q}) \leq L^2 < L_1^2,
\end{aligned}$$

was uns zu einem Widerspruch führt.
Also gilt insbesondere für $t = 1$

$$\vartheta(1) \leq L_1. \tag{3.9}$$

Betrachten wir nun abermals die Integralungleichung (3.8) für $t = 1$, so können wir wieder die linke Seite gegen Null nach oben hin abschätzen, wenn wir R im Hinblick auf (3.9) genügend klein wählen, also so klein, dass $a_\kappa(\sup_{S_R(x_0)} |v_1|) > 0$ gilt. Wir erhalten wie eben $|v_1(y)|^2 \leq w_{1,R}(y)$. Also können wir mit (3.4)

$$\begin{aligned} |v_1(y)|^2 \leq w_{1,R}(y) \underset{y \to x_0}{\longrightarrow} w_{1,R}(x_0) &\underset{(3.3)}{=} v_1(x_0) \\ &= \operatorname{dist}^2_{\mathcal{N}}(U \circ \chi^{-1}(x_0), U \circ \chi^{-1}(x_0)) = 0 \end{aligned}$$

schließen, und folglich gilt $\lim_{y \to x_0} v_1(y) = v_1(x_0) = 0$. Damit ist die Stetigkeit von U in x_0 gezeigt. Da $x_0 \in \Sigma^0_d(0)$ beliebig war und wir beliebige Randumgebungen Ω betrachtet haben, folgt die Stetigkeit von U auf ganz $\mathcal{M}$. □

3.2 Hölderstetigkeit am Rand

Sei $U : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ eine harmonische Abbildung, die eine Koordinatenumgebung $\Omega \subset \mathcal{M}$ eines Punktes $\mathcal{P} \in \partial\mathcal{M}$ in einen regulären Ball $\mathcal{B}_L(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{N}$ abbildet. Zudem sei $\chi : \overline{\Omega} \to \overline{\Sigma}_{5d}$ eine Karte, die $\overline{\Omega}$ homöomorph und surjektiv auf den Abschluss der Menge Σ_{5d} abbildet und für die gilt

$$\chi(\partial\mathcal{M} \cap \overline{\Omega}) = \Sigma^0_{5d}.$$

Für $x_0 = (x_0', 0) \in \Sigma^0_d$ definieren wir

$$\sigma(t) := \operatorname*{osc}_{\Sigma^0_t(x_0)} u.$$

Weiter sei $g \in C^{0,\alpha_0}(\overline{\Sigma_{5d}}, \mathbb{R}^n)$ eine vorgegebene Abbildung mit $u_{|\Sigma^0_{5d}} = g_{|\Sigma^0_{5d}}$. Damit wir a-priori Abschätzungen für die Hölderhalbnorm von u am Rand zeigen können, zitieren wir zuerst einen Satz aus [MW]. Dieser erlaubt es uns, die Oszillation $\operatorname{osc}_{\overline{\Sigma_d} \cap B_\rho(y)} u$ gegen $C\rho^\alpha$, für $y \in \Sigma_d$ und ρ hinreichend klein, abzuschätzen. Hieraus folgern wir dann die Hölderstetigkeit von u am Rand.

Satz 3.2.
Wenn $\sigma(R) < \frac{L}{b_\omega(L)}$ und wenn

$$2L + b_\omega(L)\sigma(R) < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}},$$

dann existiert ein $R^* = R^*(\lambda, \mu, L, \omega, \kappa, m) \in (0, R]$, so dass für alle $\rho \in (0, R^*]$

$$\operatorname*{osc}_{S_\rho(x_0)} u \leq C\left[\left(\frac{\rho}{R^*}\right)^\beta \operatorname*{osc}_{S_R(x_0)} u + \sigma\left(\sqrt{\rho R}\right) \right],$$

wobei $C = C(\lambda, \mu, L, \kappa, m)$ und $\beta = \beta(\lambda, \mu, m) \in (0, 1)$.

Beweis. siehe [MW, Thm. 5.1]. □

Um Satz 3.2 anwenden zu können, zeigen wir die folgenden zwei Behauptungen:

1. Beh.: Es existiert ein $R \leq d$ mit $\operatorname{osc}_{\Sigma^0_R(x_0)} u < \frac{L}{b_\omega(L)}$ für $x_0 \in \Sigma^0_d$, wobei R nur von den Parametern λ, μ, L, ω, κ, α_0 und $\text{Höl}_{\alpha_0,\Sigma^0_{5d}} g$ abhängt.

Beweis. Sei $\rho \leq d$. Für $x \neq y \in \Sigma^0_\rho(x_0)$ gilt: $|x-y| \leq 2\rho$. Dies impliziert $\frac{1}{2} \leq \frac{\rho}{|x-y|}$ und somit gilt $1 \leq 2^{\alpha_0} \frac{\rho^{\alpha_0}}{|x-y|^{\alpha_0}}$, wobei $\alpha_0 \in (0,1]$ der Hölderexponent der Randabbildung g ist. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\operatorname*{osc}_{\Sigma^0_\rho(x_0)} u = \sup_{\substack{x,y\in\Sigma^0_\rho(x_0)\\ x\neq y}} |u(x)-u(y)| &\leq \sup_{\substack{x,y\in\Sigma^0_\rho(x_0)\\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha_0}} \rho^{\alpha_0} 2^{\alpha_0} \\ &\leq 2^{\alpha_0}\rho^{\alpha}\,\text{Höl}_{\alpha_0,\Sigma^0_{5d}} g \leq C\rho^{\alpha_0}. \qquad (3.10)\end{aligned}$$

Damit folgt die Existenz eines $R \leq d$, so dass $\operatorname{osc}_{\Sigma^0_R(x_0)} u < \frac{L}{b_\omega(L)}$. Dabei hängt R nur von λ, μ, L, ω, κ, α_0 und von $\text{Höl}_{\alpha_0,\Sigma^0_{5d}} g$ ab. □

Wegen $\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} - 2L > 0$, kann man R bei Bedarf noch weiter verkleinern, so dass auch folgende Behauptung ihre Gültigkeit erhält:
2. Beh.: Es existiert ein $R \leq d$, so dass die erste Behauptung gilt, und, so dass $2L + b_\omega(L)\sigma(R) < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$, wobei R von den gleichen Parametern wie in der ersten Behauptung abhängt.
Damit sind insbesondere die Voraussetzungen von Satz 3.2 erfüllt.

Bemerkung 3.3.
Im Existenzsatz wird eine Schar von Randabbildungen $g_t = t\,g$ auftauchen. Wie man leicht einsieht, hängt die Konstanten C in (3.10) von der Hölderhalbnorm der vorgegebenen Randabbildung g ab. Für $t = 1$ wird diese jedoch wegen der speziellen Gestalt von g_t maximal. Damit können wir jede so erhaltene Konstante C_t durch C_1 gleichmäßig bezüglich t nach oben abschätzen. Somit erzielen wir die Anwendbarkeit der a-priori Abschätzungen im späteren Beweis des Existenzsatzes.

Sei nun $y \in \Sigma_d \cup \Sigma^0_d$ und $x_0 := (y^1, \ldots, y^{m-1}, 0) \in \Sigma^0_d$ die orthogonale Projektion von y auf Σ^0_d und $0 < \rho \leq \frac{R^*}{8}$, wobei $R^* = R^*(\lambda, \mu, L, \omega, \kappa, m)$ die Konstante aus Satz 3.2 ist. Nun unterscheiden wir folgende Fälle:
1. Fall: $B_{4\rho}(y) \cap \Sigma^0_R(x_0) = \emptyset$
Damit sind die Voraussetzungen der inneren a-priori Abschätzungen von u erfüllt und wir erhalten

$$\operatorname*{osc}_{B_\rho(y)\cap\overline{\Sigma_d}} u \leq \operatorname*{osc}_{B_\rho(y)} u \leq C 2^\gamma \rho^\gamma.$$

Hierbei bezeichnen wir mit γ den Hölderexponenten von u aus Satz 2.12.

2. Fall: $B_{4\rho}(y) \cap \Sigma_d^0(x_0) \neq \emptyset$

Dann können wir wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
\operatorname*{osc}_{B_\rho(y)\cap\overline{\Sigma_d}} u &\leq \operatorname*{osc}_{S_{8\rho}(x_0)\cup\Sigma^0_{8\rho}(x_0)} u \underset{(\text{Satz } 3.1)}{=} \operatorname*{osc}_{S_{8\rho}(x_0)} u \\
&\underset{\substack{\text{Satz } 3.2\\ 8\rho\leq R^*}}{\leq} C\left[\left(\frac{8\rho}{R^*}\right)^\beta 2L + \operatorname*{osc}_{\Sigma^0_{\sqrt{8\rho R}}} u\right] \\
&\underset{(3.10)}{\leq} C\left[\left(\frac{8\rho}{R^*}\right)^\beta 2L + C2^{\alpha_0}\rho^{\alpha_0/2}R^{\alpha_0/2}\right] \\
&\leq C\max\left(\rho^\beta, \rho^{\alpha_0/2}\right).
\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man also

$$\operatorname*{osc}_{B_\rho(y)\cap\overline{\Sigma_d}} u \leq C\rho^\alpha \qquad \text{für alle } y \in \Sigma_d \cup \Sigma_d^0, \tag{3.11}$$

mit Konstanten $C = C(d, m, \lambda, \mu, \omega, \kappa, L, \text{Höl}_{\alpha_0,\Sigma^0_{5d}(0)}g)$, $\alpha = \min(\beta, \alpha_0/2)$ und $\rho \leq \frac{R^*}{8}$. Mit folgenden Abschätzungen erhalten wir die Hölderstetigkeit von u am Rand. Seien nun $x, y \in \overline{\Sigma_d}$.

1. Fall: $|x-y| < \frac{R^*}{8}$

$$|u(x)-u(y)| \leq \operatorname*{osc}_{B_{|x-y|}(y)} u \leq C|x-y|^\alpha$$

2. Fall: $|x-y| \geq \frac{R^*}{8}$

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}\left(\frac{8|x-y|}{R^*}\right)^\alpha \leq \tilde{C}$$

wobei die Konstante $\tilde{C}$ nur von den Daten des Problems abhängt.

Wir klären nun durch ein Skalierungsargument die Abhängigkeit der Konstanten von dem Radius d. Für $x \in B_1(0)$ ist $\rho x \in B_\rho(0)$ und damit ist $\tilde{u}(x) := u(\rho x)$ auf $B_1(0)$ wohldefiniert. Wir berechnen im Folgenden die Differentialgleichungen, die von $\tilde{u}$ erfüllt werden. Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen (2.7) des Energiefunktionals erhalten wir für $\varphi \in C_0^\infty(\Sigma_\rho(0), \mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\Sigma_\rho(0)} A^{\alpha\beta}(x)D_\alpha u^i D_\beta\varphi^i\,dx = \int_{\Sigma_\rho(0)} \Gamma^l_{ij}(u)A^{\alpha\beta}(x)D_\alpha u^i D_\beta u^j\varphi^l\,dx.$$

Mit der Substitution $z = x/\rho$ und dem induzierten Isomorphismus zwischen $C_0^\infty(\Sigma_\rho(0), \mathbb{R}^n)$ und $C_0^\infty(\Sigma_1(0), \mathbb{R}^n)$ ist dies äquivalent zu:

$$\int_{\Sigma_1(0)} \tilde{A}^{\alpha\beta}(z)\frac{1}{\rho}D_\alpha\tilde{u}^i\frac{1}{\rho}D_\beta\tilde{\varphi}^i\rho^n\,dz = \int_{\Sigma_1(0)} \Gamma^l_{ij}(\tilde{u})\tilde{A}^{\alpha\beta}(z)\frac{1}{\rho}D_\alpha\tilde{u}^i\frac{1}{\rho}D_\beta\tilde{u}^j\tilde{\varphi}^l\rho^n\,dz$$

für alle $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\Sigma_1(0), \mathbb{R}^n)$, wobei $\tilde{A}^{\alpha\beta}(z) := A^{\alpha\beta}(\rho z)$ die skalierte Matrix bezeichne. Offenbar erfüllt auch die skalierte Matrix die Strukturbedingung (2.8). Die gerade erhaltenen (schwachen) Differentialgleichungen besitzen also dieselbe Struktur wie die Euler-Lagrange-Gleichungen des Energiefunktionals. Damit können wir die bislang hergeleiteten

Abschätzungen für die skalierte Funktion $\tilde{u}$ ebenso durchführen, wobei hier die Konstanten nicht von dem Radius d abhängen. Die Beobachtung $\text{Höl}_{\alpha,\Sigma_1(0)}\tilde{u} = \rho^\alpha \text{Höl}_{\alpha,\Sigma_\rho(0)} u$ impliziert schließlich die Gültigkeit des folgenden Satzes.

Satz 3.4.
Sei u eine Darstellung von U in Normalkoordinaten zentriert um $\mathcal{Q}$ auf $\mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$. Weiter sei $g \in C^{0,\alpha_0}(\overline{\Sigma_{5d}}, \mathbb{R}^n)$ gegeben mit $u_{|\Sigma^0_{5d}} = g_{|\Sigma^0_{5d}}$. Dann existieren Konstanten $C = C(m, \lambda, \mu, \omega, \kappa, L, \text{Höl}_{\alpha_0,\Sigma^0_{5d}(0)} g)$ und $\alpha = \alpha(m, \alpha_0, \lambda, \mu, L, \omega, \kappa)$, so dass folgende Abschätzung gilt:

$$\text{Höl}_{\alpha,\Sigma_d(0)} u \leq C d^{-\alpha}.$$

Damit ist die Hölderstetigkeit von u am Rand bewiesen und die Hölderhalbnorm von u zum Exponenten α ist a-priori abgeschätzt.

Kapitel 4

Hölderabschätzungen für den Gradienten im Inneren

Sei $\Omega \subset int(\mathcal{M})$ offen und $\chi : \Omega \to B_{4d}(0)$ eine lokale Karte von $\mathcal{M}$. Sei weiterhin u eine Darstellung von U in Normalkoordinaten um $\mathcal{Q}$ in $\mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$. Sei nun $x_0 \in B_d(0)$ beliebig und $R < \min(4^{-i_1}d/4, 1)$, dabei ist $i_1 = i_1(n, m, \lambda, \mu, \kappa, \omega, L)$ die Konstante aus Satz 2.12. Wir wollen nun Hölderabschätzungen für den Gradienten ∇u von u finden. Die Beweistechnik dazu, die in [GH, Section 7] skizziert ist, vermeidet Green'sche Funktionen und basiert im Wesentlichen auf Aussagen von Campanato, [Ca], über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wir werden zu Typen von Abschätzungen gelangen, die es uns erlauben, das „Dirichlet Growth Theorem" von Morrey, welches weiter unten im Text zitiert wird, anzuwenden. Damit schließen wir auf die Hölderstetigkeit von u zu höheren Exponenten. Die Kenntnis von diesem verbesserten Hölderexponenten kombiniert mit Lemma 2.11 lässt uns folgern, dass u Element eines Campanato-Raumes ist. Daraus schließen wir dann auf die Hölderstetigkeit des Gradienten ∇u von u.

In Satz 2.12 und in Satz 3.1 konnten wir zeigen, dass $u \in C^{0,\sigma_0}(\overline{B_d(0)}, \mathbb{R}^n)$ für ein $\sigma_0 = \sigma_0(m, \lambda, \mu, L, \omega, \kappa) \in (0, 1]$ und dass die Höldernorm von u nur durch diese Daten und den Radius d abgeschätzt ist. Aus den schwachen Euler-Lagrange-Gleichungen des Energiefunktionals (2.7) ergeben sich folgende schwache Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{B_R(x_0)} A^{\alpha\beta}(x_0) D_\alpha u^i D_\beta \varphi^i \, dx \\ &= \int\limits_{B_R(x_0)} \left[A^{\alpha\beta}(x_0) - A^{\alpha\beta}(x)\right] D_\alpha u^i D_\beta \varphi^i \, dx + \int\limits_{B_R(x_0)} f^l(u) \varphi^l \, dx \end{aligned} \tag{4.1}$$

für alle $\varphi \in W_0^{1,2}(B_R(x_0), \mathbb{R}^n) \cap L^\infty(B_R(x_0), \mathbb{R}^n)$. Diese Formulierung der Differentialgleichungen findet häufig Anwendung in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen und wird in der Literatur oft „Einfrieren des Hauptteils“ oder „freezing technique“ genannt.
Da $A^{\alpha\beta} \in C^1(B_{4d}(0), \mathbb{R}^{m\times m})$, vgl. Kapitel 2, existiert nach dem Mittelwertsatz ein $c_1 = c_1(\mu, \lambda) > 0$, so dass

$$\left| A^{\alpha\beta}(x_0) - A^{\alpha\beta}(x) \right| \leq c_1 |x - x_0| \leq c_1 R \qquad \text{für alle } x \in B_R(x_0). \tag{4.2}$$

Nun betrachten wir die Lösung v von den folgenden n linearen elliptischen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$-D_\beta(A^{\alpha\beta}(x_0) D_\alpha v) = 0 \quad \text{in } B_R(x_0), \tag{4.3}$$

$$v - u \quad \in W_0^{1,2}(B_R(x_0), \mathbb{R}^n). \tag{4.4}$$

Nach [GM, Thm. 3.22] existiert eine eindeutige Lösung v von (4.3), (4.4). Da $(A^{\alpha\beta})_{\alpha\beta}$ symmetrisch ist, gilt mit demselben Satz, dass v der eindeutige Minimierer von dem Funktional

$$\mathcal{F}(v) = \frac{1}{2} \int_{B_R(x_0)} A^{\alpha\beta}(x_0) D_\alpha v^i D_\beta v^i \, dx \tag{4.5}$$

in der Klasse $W_u^{1,2} = \{v \in W^{1,2}(B_R(x_0), \mathbb{R}^n) : v - u \in W_0^{1,2}(B_R(x_0), \mathbb{R}^n)\}$ ist. Es sei bemerkt, dass u selbst in der Klasse $W_u^{1,2}$ liegt, also $\mathcal{F}(v) \leq \mathcal{F}(u)$ gilt. Die Elliptizität von $A^{\alpha\beta}$, vgl. (2.8), impliziert sofort, dass $|v|^2$ eine Sublösung des Divergenzformoperators $D_\beta(A^{\alpha\beta}(x_0) D_\alpha)$ ist. Das schwache Maximumprinzip, vgl. z.B. [GT, Thm. 8.1], liefert $v \in L^\infty(B_R(x_0), \mathbb{R}^n)$ und die Abschätzung

$$\sup_{B_R(x_0)} |v| \leq \sup_{B_R(x_0)} |u|. \tag{4.6}$$

[LU, Chapter 7, Thm. 3.1] liefert weiterhin $v \in C^{0,\sigma}(\overline{B_R(x_0)}, \mathbb{R}^n)$ für eine Konstante $\sigma = \sigma(m, \mu, \lambda, \sigma_0)$. Des Weiteren gilt die Abschätzung

$$\|v\|_{C^{0,\sigma}(\overline{B_R(x_0)}, \mathbb{R}^n)} \leq c_2 \, \|u\|_{C^{0,\sigma}(\overline{B_R(x_0)}, \mathbb{R}^n)}, \tag{4.7}$$

mit Konstante $c_2 = c_2(m, \mu, \lambda, \sigma_0)$. Also sind c_2 und σ unabhängig von R und x_0. Die Unabhängigkeit von den beiden Parametern ist wichtig, damit nachher unser Iterationsargument ohne Zweifel funktioniert. In der genannten Quelle geht das Gebiet nur über die dort genannte Bedingung (A) [1] ein. Da wir uns auf Bällen oder im nächsten Kapitel auf Halbbällen befinden, sind die Parameter der Bedingung (A) a-priori bestimmt und für alle Bälle bzw. Halbbälle identisch, also unabhängig von x_0 und R. Insbesondere folgt aus

[1] $G \subset \mathbb{R}^m$ sei ein Gebiet. ∂G erfüllt die Bedingung (A) genau dann, wenn es Konstanten a_0, $\theta_0 > 0$ gibt, so dass für alle $B_\rho(z_0)$, $z_0 \in \partial G$, $\rho \leq a_0$ und für beliebige Zusammenhangskomponenten von $G \cap B_\rho(z_0)$ gilt: $\text{meas}(G \cap B_\rho(z_0)) \leq (1 - \theta_0)\text{meas}(B_\rho(z_0))$.

(4.7) die Stetigkeit von v auf $\overline{B_R(x_0)}$, also existieren die Randwerte sogar im klassischen Sinne. Als Folgerungen aus der L^2-Regularität von v und insbesondere der Caccioppoli-Ungleichung, zitieren wir [GM, Prop. 5.7] für ∇v, da auch alle Ableitungen von v (4.3) erfüllen.

Dabei setzen wir

$$((\nabla v)_{y,r})_{\alpha i} := \fint_{B_r(y)} D_\alpha v^i \, dx := \frac{1}{\operatorname{meas}(B_r(y))} \int_{B_r(y)} D_\alpha v^i \, dx$$

und erhalten somit

$$\int_{B_\rho(y)} |\nabla v|^2 \, dx \leq c_3 \left(\frac{\rho}{r}\right)^m \int_{B_r(y)} |\nabla v|^2 \, dx, \tag{4.8}$$

$$\int_{B_\rho(y)} |\nabla v - (\nabla v)_{y,\rho}|^2 \, dx \leq c_3 \left(\frac{\rho}{r}\right)^{m+2} \int_{B_r(y)} |\nabla v - (\nabla v)_{y,\rho}|^2 \, dx \tag{4.9}$$

für alle $y \in B_R(x_0)$ und für alle $0 < \rho \leq r \leq \operatorname{dist}(y, \partial B_R(x_0))$ und $c_3 = c_3(n, m, \lambda, \mu)$. Wir verwenden diese beiden Abschätzungen im Folgenden für $y = x_0$ und $r = R$.

Wie oben schon angedeutet wollen wir Morrey's „Dirichlet Growth Theorem“ anwenden. Hierfür muss die L^2-Norm des Gradienten ∇u von u auf kleinen Bällen kontrolliert werden. Wir schätzen mit (4.8) ab

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(x_0)} |\nabla u|^2 \, dx &\leq 2\left[\int_{B_\rho(x_0)} |\nabla v|^2 \, dx + \int_{B_R(x_0)} |\nabla u - \nabla v|^2 \, dx\right] \\ &\leq 2\left[\left(\frac{\rho}{R}\right)^m \int_{B_R(x_0)} |\nabla v|^2 \, dx + \int_{B_R(x_0)} |\nabla u - \nabla v|^2 \, dx\right]. \end{aligned}$$

Hier und im Folgenden verwenden wir stillschweigend die Abschätzung $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$. Nutzen wir jetzt aus, dass v ein Minimierer von (4.5) ist, so erhalten wir auf Grund der Elliptizitätsbedingung an $A^{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} \int_{B_R(x_0)} |\nabla v|^2 \, dx &\leq \int_{B_R(x_0)} \frac{1}{\lambda^*} A^{\alpha\beta}(x_0) D_\alpha v^i D_\beta v^i \, dx \\ &\leq \int_{B_R(x_0)} \frac{1}{\lambda^*} A^{\alpha\beta}(x_0) D_\alpha u^i D_\beta u^i \, dx \\ &\leq \frac{\mu^*}{\lambda^*} \int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Diese beiden Ungleichungen ergeben sodann

$$\int_{B_\rho(x_0)} |\nabla u|^2 \, dx \leq c_4 \left[\left(\frac{\rho}{R}\right)^m \int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2 \, dx + \int_{B_R(x_0)} |\nabla u - \nabla v|^2 \, dx\right] \tag{4.10}$$

für alle $\rho \leq R$. Um den zweiten Term auf der rechten Seite zu kontrollieren, untersuchen wir nun, welche Differentialgleichungen die Differenz $u - v$ erfüllt. Aufgrund von (4.3) folgt sofort, dass die Differenz $u-v$ (4.1) erfüllt, in Formeln bedeutet dies

$$\begin{aligned}&\int_{B_R(x_0)} A^{\alpha\beta}(x_0)D_\alpha(u^i-v^i)D_\beta\varphi^i\,dx\\ &=\int_{B_R(x_0)}\left[A^{\alpha\beta}(x_0)-A^{\alpha\beta}(x)\right]D_\alpha u^i D_\beta\varphi^i\,dx+\int_{B_R(x_0)} f^l(u)\varphi^l\,dx\end{aligned}\tag{4.11}$$

für alle $\varphi\in W_0^{1,2}(B_R(x_0),\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(B_R(x_0),\mathbb{R}^n)$. Wir wollen dieses System mit der zulässigen Testfunktion $\varphi:=u-v$, vgl. (4.4), testen. Zur Vorbereitung der nachher notwendigen Abschätzungen bemerken wir noch, dass für ein $y\in\partial B_R(x_0)$ wegen (4.4) und der Existenz der klassischen Randwerte $u(y)=v(y)$ gilt, somit folgt

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in B_R(x_0)}|u(x)-v(x)|\\ \le\ &\sup_{x\in B_R(x_0)}|u(x)-u(y)|+\sup_{x\in B_R(x_0)}|v(x)-v(y)|\underset{(4.7)}{\le} c_5R^\sigma\end{aligned}\tag{4.12}$$

mit Konstante $c_5=c_5(m,n,\lambda,\mu,L,\omega,\kappa,d)$. Im letzten Schritt haben wir die Hölderstetigkeit von u und v sowie (4.7) ausgenutzt. Jetzt wollen wir die zentrale Gradientenabschätzung herleiten. Unter Benutzung der Elliptizität (2.8) und und der Ungleichung (2.10) erhalten wir sofort

$$\begin{aligned}\int_{B_R(x_0)}|\nabla u|^2\,dx &\le \int_{B_R(x_0)}\frac{1}{\lambda^*}A^{\alpha\beta}(x_0)D_\alpha u^i D_\beta u^i\,dx\\ &\le \frac{1}{\lambda^* b_\kappa(L)^2}\int_{B_R(x_0)}A^{\alpha\beta}(x_0)D_\alpha u^i D_\beta u^j h_{ij}(u)\,dx\\ &= \frac{1}{\lambda^* b_\kappa(L)^2}\int_{B_R(x_0)}\mathbf{E}(u)\,dx.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Wir erinnern hier an die Energiedichte, vgl. (2.4),

$$2e(U)(x,[y])=g^{\alpha\beta}(x,y)D_\alpha\tilde{u}^iD_\beta\tilde{u}^jh_{ij}(\tilde{u}),$$

wobei $\tilde{u}$ eine Darstellung von U ist. Die Koordinateninvarianz von $e(U)$ impliziert

$$\mathbf{E}(\tilde{u})(x)=2\,⨍_{\mathcal{S}^{m-1}}e(U)\frac{\det g_{\alpha\beta}(x,y)}{F(x,y)^m}\,d\sigma(y)=\mathbf{E}(u)(x).\tag{4.14}$$

Sei nun $\tilde{u}$ eine Darstellung von U in Normalkoordinaten um $U(\chi^{-1}(x_0))$ in $\mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$. Es gilt

$$|\tilde{u}(x_0)|=dist_{\mathcal{N}}(U(\chi^{-1}(x_0)),U(\chi^{-1}(x_0)))=0.$$

Also folgt auch $\tilde{u}(x_0)=0$. Auf Grund der Wahl von $R<4^{-i_1}d/4$ gilt nach Satz 2.12 die Abschätzung $\operatorname{osc}_{B_{\tilde{R}}(x_0)}u\le\frac{L}{b_\omega(L)}$. Dies zusammen mit Lemma 2.10 impliziert:

$$|\tilde{u}|=\ \operatorname{dist}_{\mathcal{N}}(U\circ\chi^{-1},U(\chi^{-1}(x_0)))\le b_\omega(L)|u-u(x_0)|\le b_\omega(L)\operatorname*{osc}_{B_{\tilde{R}}(x_0)}u\le L.$$

Also gilt $|\tilde{u}| \leq L$ auf $B_{4R}(x_0) \subset B_{4d}(0)$. Damit folgt aus der lokalen Energieabschätzung in Lemma 2.11

$$\begin{aligned}\int_{B_R(x_0)} \mathbf{E}(\tilde{u})\, dx &\leq CR^{m-2}\left[\sup_{B_{4R}(x_0)} |\tilde{u}|^2 - \sup_{B_R(x_0)} |\tilde{u}|^2\right] \\ &\leq CR^{m-2}\left[\sup_{B_{4R}(x_0)} |\tilde{u}|^2 - \inf_{B_{4R}(x_0)} |\tilde{u}|^2\right] \\ &= CR^{m-2} \operatorname*{osc}_{B_{4R}(x_0)} |\tilde{u}|^2 \end{aligned} \tag{4.15}$$

mit $C = C(m, \mu, \kappa, \lambda, L)$. Für $x, y \in B_{4R}(x_0)$ folgt wegen $\tilde{u}(x_0) = 0$ und der Hölderstetigkeit von $\tilde{u}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\big||\tilde{u}(x)|^2 - |\tilde{u}(y)|^2\big| &= \big||\tilde{u}(x)| - |\tilde{u}(y)|\big|\,\big||\tilde{u}(x)| + |\tilde{u}(y)|\big| \\ &\leq |\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)|\,\big(|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(x_0)| + |\tilde{u}(y) - \tilde{u}(x_0)|\big) \\ &\leq C'(4R)^{2\sigma}.\end{aligned}$$

Dabei ergibt sich die Konstante $C' = C'(m, \lambda, \mu, L, \omega, \kappa, d)$ aus der Konstanten aus den inneren Hölderabschätzungen von u und den Daten des Problems. Die letzte Ungleichung liefert uns eine Abschätzung für $\operatorname{osc}_{B_{4R}(x_0)} |\tilde{u}|^2$. Durch Kombination von (4.13), (4.14) und (4.15) erhalten wir die Abschätzung

$$\int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2\, dx \leq c_6 R^{m-2+2\sigma} \tag{4.16}$$

mit Konstante $c_6 = c_6(m, \lambda, \mu, L, \omega, \kappa, d)$. Wir möchten betonen, dass diese Abschätzung, insbesondere der Exponent 2σ statt σ, grundlegend für unser Vorgehen ist. Dies wird in den folgenden Abschätzungen deutlich. Jetzt sind alle Vorbereitungen getroffen, um in (4.11) $\varphi := u - v$ als Testvektor einzusetzen:

$$\begin{aligned}&\int_{B_R(x_0)} |\nabla u - \nabla v|^2\, dx \\ \leq\;& \frac{1}{\lambda^*}\int_{B_R(x_0)} A^{\alpha\beta}(x_0) D_\alpha(u^i - v^i) D_\beta(u^i - v^i)\, dx \\ \underset{(4.11)}{=}\;& \frac{1}{\lambda^*}\int_{B_R(x_0)} [A^{\alpha\beta}(x_0) - A^{\alpha\beta}(x)] D_\alpha u^i D_\beta(u^i - v^i)\, dx + \frac{1}{\lambda^*}\int_{B_R(x_0)} f^l(u)(u^l - v^l)\, dx \\ \underset{\substack{(4.2)\\(4.12)}}{\leq}\;& \frac{1}{\lambda^*}\int_{B_R(x_0)} c_1 R \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} |D_\alpha u^i D_\beta(u^i - v^i)|\, dx + \int_{B_R(x_0)} \frac{c_5 R^\sigma}{\lambda^*}\sum_{l=1}^{n} |f^l(u)|\, dx \\ \leq\;& \frac{c_1 R}{\lambda^*}\int_{B_R(x_0)} \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} |D_\alpha u^i D_\beta u^i|\, dx + \frac{c_1 R}{\lambda^*}\int_{B_R(x_0)} \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} |D_\alpha u^i D_\beta v^i|\, dx \\ &+ \frac{c_5 R^\sigma}{\lambda^*}\int_{B_R(x_0)} \sum_{l=1}^{n} |f^l(u)|\, dx.\end{aligned} \tag{4.17}$$

Nun gilt mit Hilfe der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung und einer elementaren Ungleichung [2]

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} |D_\alpha u^i D_\beta u^i| = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} | < D_\alpha u, D_\beta u > | \\
\leq\ &\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} |D_\alpha u||D_\beta u| = \sum_{\alpha=1}^{m} |D_\alpha u| \sum_{\beta=1}^{m} |D_\beta u| \leq \frac{1}{m} |\nabla u|^2.
\end{aligned}
$$

Analog schätzen wir den gemischten Term in (4.17) ab

$$
\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} |D_\alpha u^i D_\beta v^i| \leq \frac{1}{m} |\nabla u||\nabla v|.
$$

Dann folgt aus der Hölderungleichung

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_R(x_0)} |\nabla u||\nabla v|\, dx \leq \left(\int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_R(x_0)} |\nabla v|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
\leq\ &\frac{\mu^*}{\lambda^*} \int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2\, dx.
\end{aligned}
$$

Im letzten Schritt haben wir zudem die Minimierereigenschaft von v ausgenutzt, vgl. (4.5). Schließlich schätzen wir ab:

$$
\sum_{l=1}^{n} |f^l(u)| = \sum_{l=1}^{n} |\Gamma^l_{ij}(u) A^{\alpha\beta}(x) D_\alpha u^i D_\beta u^j| \underset{(2.14)}{\leq} \mu^* \Gamma_0 |\nabla u|^2 n.
$$

Damit wird (4.17) zu

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_R(x_0)} |\nabla u - \nabla v|^2\, dx \\
\leq\ &\frac{1}{\lambda^*} \left[c_1 R \left(1 + \frac{\mu^*}{\lambda^*} \right) + c_5 \mu^* \Gamma_0 n R^\sigma \right] \int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2\, dx \\
\underset{(4.16)}{\leq}\ &c_7 R^{m-2+3\sigma}
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

mit Konstante $c_7 = c_7(m, n, \lambda, \mu, \Gamma_0, L, \omega, \kappa, d)$, denn $1 \geq \sigma$ impliziert $m - 1 + 2\sigma \geq m - 2 + 3\sigma$, da wir $R \leq 1$ angenommen haben. Zur Definition von Γ_0 erinnern wir an Kapitel 2, (2.14). Außerdem wollen wir an die Bemerkung 2.14 erinnern, denn in dieser Abschätzung ist nicht eingegangen, dass u eine Normaldarstellung von U ist. Es genügen für die Abschätzung (4.18) die Eigenschaften aus Lemma 2.9. Aus (4.10) und (4.18) erhalten wir also für alle $\rho \leq R$

$$
\int_{B_\rho(x_0)} |\nabla u|^2\, dx \leq c_8 \left[\left(\frac{\rho}{R} \right)^m \int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2\, dx + R^{m-2+3\sigma} \right]
\tag{4.19}
$$

[2] $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)^{\frac{1}{2}} \geq \sqrt{m} \sum_{i=1}^{m} \sqrt{a_i}$ für $a_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$.

mit Konstante $c_8 = c_8(m, n, \lambda, \mu, \Gamma_0, L, \omega, \kappa, d)$. Sei nun ohne Einschränkung $\sigma < \frac{2}{3}$. Folglich gilt $m - 2 + 3\sigma < m$. Damit können wir folgendes Iterationslemma aus [GM, Lemma 5.12] mit $\varepsilon = 0$ auf

$$\Lambda(R) := \int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2 \, dx$$

anwenden.

Lemma 4.1 (Iterationslemma).
Sei $\Lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ eine nichtnegative und monoton wachsende Funktion mit

$$\Lambda(\rho) \leq A \Big[\Big(\frac{\rho}{R} \Big) + \varepsilon \Big]^{\alpha} \Lambda(R) + BR^{\beta}$$

für alle $0 < \rho \leq R \leq R_0$ und für A, α, $\beta > 0$ mit $\alpha > \beta$. Dann gibt es Konstanten $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(A, \alpha, \beta)$ und $c = c(A, \alpha, \beta)$, so dass für $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ gilt

$$\Lambda(\rho) \leq c\rho^{\beta} \big[R^{-\beta} \Lambda(R) + B \big] \qquad \text{für alle } 0 \leq \rho \leq R \leq R_0.$$

Beweis. siehe [GM, Lemma 5.12]. □

Wir erhalten

$$\int_{B_\rho(x_0)} |\nabla u|^2 \, dx \leq c_9 \rho^{m-2+3\sigma} \Big[R^{-(m-2+3\sigma)} \int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2 \, dx + 1 \Big] \tag{4.20}$$

für $\rho \in (0, R]$ und mit Konstante $c_9 = c_9(m, n, \lambda, \mu, \Gamma_0, L, \omega, \kappa, d)$.

Wir wollen aus dieser Ungleichung und der Beliebigkeit von $x_0 \in B_d(0)$ sowie von $R < \min(4^{-i_1} d/4, 1)$ nun die Hölderstetigkeit von u zum Exponenten $\frac{3}{2}\sigma$ zeigen und auch eine Abschätzung für die Hölderhalbnorm von u angeben, die nur von m, n, λ, μ, Γ_0, L, ω, κ und d abhängt. Dazu zitieren wir aus [Gia, Chapter III, Thm. 1.1] den folgenden Satz.

Satz 4.2 (Morrey's Dirichlet Growth Theorem).
Sei $u \in W^{1,2}(B_R(x_0))$ und es gelte

$$\int_{B_\rho(y)} |\nabla u|^2 \, dx \leq M^2 \left(\frac{\rho}{\delta(y)} \right)^{m-2+2\gamma} \quad \text{für alle } 0 < \rho \leq \delta(y) := R - |y - x_0|$$

für $y \in B_R(x_0)$ beliebig und ein $0 < \gamma \leq 1$ und $M > 0$ unabhängig von y und ρ. Dann gilt $u \in C^{0,\gamma}(B_\rho(x_0))$ für alle $\rho < R$. Weiter gilt für $|x - y| < \frac{\delta(y)}{2}$ die Abschätzung

$$|u(x) - u(y)| \leq C(m, \gamma) M \delta(y)^{1-\frac{m}{2}} \left(\frac{|x - y|}{\delta(y)} \right)^{\gamma}.$$

Beweis. [Gia, Chapter III, Thm. 1.1]. □

Sei also $y \in B_R(x_0)$ beliebig. Es gilt offensichtlich $\delta(y) < \min\left(4^{-i_1}d/4, 1\right)$. Dann können wir die Differentialgleichungen (4.3) mit den Randwerten (4.4) auf $B_{\delta(y)}(y)$ statt auf $B_R(x_0)$ betrachten. Da alle Konstanten unabhängig vom Radius R des Balles $B_R(x_0)$ und unabhängig von dessen Mittelpunkt x_0 sind, sind sie es auch von y und $\delta(y)$. Demnach erhalten wir mit den gleichen Abschätzungen wie zuvor als Analogon zu (4.20):

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho(y)} |\nabla u|^2 \, dx &\leq c_9 \rho^{m-2+3\sigma} \left[\delta(y)^{-(m-2+3\sigma)} \int_{B_{\delta(y)}(x_0)} |\nabla u|^2 \, dx + 1 \right] \\ &\leq c_9 \left(\frac{\rho}{\delta(y)} \right)^{m-2+3\sigma} \left[\int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2 \, dx + R^{m-2+3\sigma} \right] \end{aligned} \tag{4.21}$$

für alle $0 \leq \rho \leq \delta(y)$. Wir bemerken, dass mit Hilfe von (4.16) das Integral auf der rechten Seite abgeschätzt ist durch $c_6 R^{m-2+2\sigma}$, damit wird (4.21) zu:

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho(y)} |\nabla u|^2 \, dx &\leq c_9 \left(\frac{\rho}{\delta(y)} \right)^{m-2+3\sigma} \left[c_6 R^{m-2+2\sigma} + R^{m-2+3\sigma} \right] \\ &\leq c_{10}^2 \left(\frac{\rho}{\delta(y)} \right)^{m-2+3\sigma}\end{aligned}$$

für alle $0 \leq \rho \leq \delta(y)$, wobei c_{10} auch von R abhängt. Diese Konstante wird jedoch nur für den Beweis der Hölderstetigkeit von u benutzt und findet später keine Verwendung mehr. Mit dem „Dirichlet Growth Theorem", Satz 4.2, folgern wir $u \in C^{0,\frac{3}{2}\sigma}(\overline{B_{R/2}(x_0)}, \mathbb{R}^n)$ und wir können wie folgt die Hölderhalbnorm abschätzen:
Seien $x, y \in \overline{B_{R/2}(x_0)}$, also $\delta(x) \geq R/2$.
<u>*1. Fall:*</u> $|x-y| < \delta(x)/2 =: \delta/2$

$$\begin{aligned}|u(x) - u(y)| &\leq c(m,\sigma) c_{10} \delta^{1-\frac{m}{2}-\frac{3}{2}\sigma} |x-y|^{\frac{3}{2}\sigma} \\ &\leq c(m,\sigma) c_{10} \left(\frac{R}{2} \right)^{1-\frac{m}{2}-\frac{3}{2}\sigma} |x-y|^{\frac{3}{2}\sigma} \\ &\leq c_{11} |x-y|^{\frac{3}{2}\sigma}.\end{aligned}$$

<u>*2. Fall:*</u> $|x-y| \geq \delta(x)/2$

$$\begin{aligned}|u(x) - u(y)| &= \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\frac{3}{2}\sigma}} |x-y|^{\frac{3}{2}\sigma} \\ &\underset{\frac{1}{\delta} \leq \frac{2}{R}}{\leq} 2L \left(\frac{4}{R} \right)^{\frac{3}{2}\sigma} |x-y|^{\frac{3}{2}\sigma} \\ &\leq c_{12} |x-y|^{\frac{3}{2}\sigma}.\end{aligned}$$

Wir überdecken nun $\overline{B_d(0)}$ auf endliche Art mit Bällen der Form $B_{R/4}(x_i)$ mit $R := \frac{4^{-i_1}}{8} d$. Diese Wahl von R stellt die Anwendbarkeit aller vorher hergeleiteten Abschätzungen sicher und diese Wahl hängt nur von den Parametern d, m, λ, μ, L, ω und κ ab. Für $x, y \in \overline{B_d(0)}$ unterscheiden wir nun folgende Fälle:

<u>*1. Fall:*</u> $|x-y| < R/4$
Es existiert ein i mit $x \in B_{R/4}(x_i)$ und damit gilt

$$|x_i - y| \leq |x-y| + |x-x_i| < R/4 + R/4 = R/2.$$

Damit gilt nach obiger Abschätzung

$$|u(x) - u(y)| \leq \max(c_{11}, c_{12})|x-y|^{\frac{3}{2}\sigma},$$

wobei die Konstante nur von m, n, λ, μ, Γ_0, L, ω, κ und d abhängt nach Wahl von R.
<u>*2. Fall:*</u> $|x-y| \geq R/4$

$$\begin{aligned}|u(x) - u(y)| &= \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\frac{3}{2}\sigma}} |x-y|^{\frac{3}{2}\sigma} \leq 2L\left(\frac{4}{R}\right)^{\frac{3}{2}\sigma} |x-y|^{\frac{3}{2}\sigma} \\ &\leq c_{12}|x-y|^{\frac{3}{2}\sigma}\end{aligned}$$

mit Konstante $c_{12} = c_{12}(m, n, \lambda, \mu, \Gamma_0, L, \omega, \kappa, d)$ nach Wahl von R.
Damit ist gezeigt, dass die Hölderhalbnorm von u auf $\overline{B_d(0)}$ a-priori durch m, n, λ, μ, Γ_0, L, ω, κ und d abgeschätzt ist. Nun können wir mit diesem verbesserten Hölderexponenten noch einmal die Energieabschätzung wiederholen, die uns auf (4.16) geführt hat, und erhalten analog zu (4.16) nur mit $\frac{3}{2}\sigma$ statt σ

$$\int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2\, dx \leq c_6 R^{m-2+2\left(\frac{3}{2}\sigma\right)}.$$

Wiederholen wir die Herleitung von (4.18), so erhalten wir als entsprechendes Analogon die Ungleichung

$$\int_{B_R(x_0)} |\nabla u - \nabla v|^2\, dx \leq c_7 R^{m-2+(3+1)\sigma}$$

und (4.20) wird zu

$$\int_{B_\rho(x_0)} |\nabla u|^2\, dx \leq c_9 \rho^{m-2+4\sigma}\left[R^{-(m-2+4\sigma)} \int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2\, dx + 1\right]$$

für alle $0 \leq \rho \leq R$ unter der Annahme, dass $\sigma < \frac{1}{2}$ gilt. Dies führt mit genau den gleichen Überlegungen wie oben vorgeführt zur Hölderstetigkeit von u zum Exponenten $\frac{4}{2}\sigma$. Wir gewinnen also nach jedem dieser Schritte $\frac{1}{2}\sigma$ für den Hölderexponenten von u hinzu. Nach N Iterationen ergibt sich folgende Situation:
Unter der Annahme $\sigma < \frac{2}{N+2}$, erhalten wir die Hölderstetigkeit von u zum verbesserten Hölderexponenten $\left(1 + \frac{N}{2}\right)\sigma$.
Mit dieser Beobachtung gelangen wir zu folgender *Behauptung:*

$$\int_{B_\rho(x_0)} |\nabla u|^2\, dx \leq c_{13}(\beta)\rho^{m-2+2\beta} \qquad \text{für alle } 0 < \beta < 1 \tag{4.22}$$

mit Konstante $c_{13}(\beta) = c_{13}(m, n, \lambda, \mu, \Gamma_0, L, \omega, \kappa, d, \beta)$.
Diese Behauptung lässt sich folgendermaßen begründen. Zu $\sigma \in (0, 1)$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{2}{N+2} \le \sigma < \frac{2}{N-1+2}$. Also können wir $N-1$ der obigen Iterationsschritte durchführen, da die Voraussetzungen vom Iterationslemma 4.1 erfüllt sind. Wir erhalten $u \in C^{0,(1+\frac{N-1}{2})\sigma}(\overline{B_d(0)}, \mathbb{R}^n)$. Damit wir nun den N-ten Iterationsschritt durchführen können, verkleinern wir σ geeignet, z.B. zu: $\sigma = \sigma(\beta) := \frac{2}{N+2} - \frac{1-\beta}{2}\frac{2}{N+2}$.
Damit gilt $\sigma < \frac{2}{N+2}$ und $\left(1 + \frac{N}{2}\right)\sigma > \beta$. Der N-te Iterationsschritt in Kombination mit der Energieabschätzung (4.16) mit $\left(1 + \frac{N}{2}\right)\sigma$ bzw. β als Hölderexponenten von u liefert also (4.22).
Setzen wir nun wieder $\varphi := u - v$ als zulässigen Testvektor in (4.11) ein und verwenden (4.22), so erhalten wir analog zu der Herleitung von (4.18)

$$\begin{aligned} & \int_{B_R(x_0)} |\nabla u - \nabla v|^2 \, dx \\ \le \quad & \frac{1}{\lambda^*} \int_{B_R(x_0)} A^{\alpha\beta}(x_0) D_\alpha(u^i - v^i) D_\beta(u^i - v^i) \, dx \\ \le \quad & \frac{1}{\lambda^*} \left[c_1 R \left(1 + \frac{\mu^*}{\lambda^*}\right) + c_5 \mu^* \Gamma_0 n R^\sigma \right] \int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2 \, dx \\ \underset{(4.22)}{\le} \quad & c_{14} R^{m-2+2\beta+\sigma} \end{aligned} \tag{4.23}$$

mit Konstante $c_{14} = c_{14}(m, n, \lambda, \mu, \Gamma_0, L, \omega, \kappa, d, \beta)$. Jetzt haben wir die wichtigsten Abschätzungen hergeleitet, um zu zeigen, dass auch der Gradient ∇u von u hölderstetig ist. Hierfür zeigen wir per Definition, dass $\nabla u \in \mathcal{L}^{2,\gamma}(B_d(0), \mathbb{R}^{mn})$ mit $\gamma := \beta + \frac{\sigma}{2} - 1$ für $\beta \in (1 - \frac{\sigma}{2}, 1)$. Es bezeichne $(\nabla u)_\rho$ den Mittelwert von ∇u auf $B_\rho(x_0)$. Wir schätzen nun mit (4.23) und (4.9) folgendermaßen ab:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \int_{B_\rho(x_0)} |\nabla u - (\nabla u)_\rho|^2 \, dx \\ \le & \frac{1}{2} \int_{B_\rho(x_0)} |\nabla u - \nabla v|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{B_\rho(x_0)} |(\nabla u)_\rho - \nabla v|^2 \, dx \\ \le & \int_{B_R(x_0)} |\nabla u - \nabla v|^2 \, dx + \int_{B_\rho(x_0)} |(\nabla u)_\rho - (\nabla v)_\rho|^2 \, dx + \int_{B_\rho(x_0)} |(\nabla v)_\rho - \nabla v|^2 \, dx \\ \le & c_{14} R^{m-2+2\beta+\sigma} + \int_{B_\rho(x_0)} |(\nabla u)_\rho - (\nabla v)_\rho|^2 \, dx + c_3 \left(\frac{\rho}{R}\right)^{m+2} \int_{B_R(x_0)} |\nabla v - (\nabla v)_R|^2 \, dx \\ \le & c_{14} R^{m-2+2\beta+\sigma} + \int_{B_\rho(x_0)} |(\nabla u)_\rho - (\nabla v)_\rho|^2 \, dx + 4c_3 \int_{B_R(x_0)} |\nabla u - \nabla v|^2 \, dx \\ & + 4c_3 \left(\frac{\rho}{R}\right)^{m+2} \int_{B_R(x_0)} |\nabla u - (\nabla u)_R|^2 \, dx + 4c_3 \int_{B_R(x_0)} |(\nabla u)_R - (\nabla v)_R|^2 \, dx. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Nun untersuchen wir, wie sich die Integrale mit den Mittelwerten abschätzen lassen. Dazu verwenden wir die Hölder-Ungleichung und Formel (4.23)

$$\begin{aligned}
&\int_{B_\rho(x_0)} \left|(\nabla u)_\rho - (\nabla v)_\rho\right|^2 dx \\
= \quad & \int_{B_\rho(x_0)} \frac{1}{\mathrm{meas}(B_\rho(x_0))^2} \left| \int_{B_\rho(x_0)} \nabla u(y) - \nabla v(y)\, dy \right|^2 dx \\
= \quad & \frac{1}{\mathrm{meas}(B_\rho(x_0))} \left(\int_{B_\rho(x_0)} \left|\nabla u(y) - \nabla v(y)\right| dy \right)^2 \\
\underset{\text{Hölder}}{\leq} \quad & \left(\int_{B_\rho(x_0)} \left|\nabla u(y) - \nabla v(y)\right|^2 dy \right) \\
\underset{(4.23)}{\leq} \quad & c_{14} R^{m-2+2\beta+\sigma}.
\end{aligned}$$

Analog schätzen wir den anderen Term mit der Differenz der Mittelwerte in der Ungleichung (4.24) ab. Damit schätzen wir (4.24) insgesamt weiter ab zu

$$\begin{aligned}
&\int_{B_\rho(x_0)} |\nabla u - (\nabla u)_\rho|^2 \, dx \\
\leq \quad & 64 c_{14} R^{m-2+2\beta+\sigma} + 16 c_3 \left(\frac{\rho}{R}\right)^{m+2} \int_{B_R(x_0)} |\nabla u - (\nabla u)_R|^2 \, dx.
\end{aligned}$$

Dies ergibt insgesamt

$$\int\limits_{B_\rho(x_0)} |\nabla u - (\nabla u)_\rho|^2 \, dx \leq c_{15} \left[\left(\frac{\rho}{R}\right)^{m+2} \int_{B_R(x_0)} |\nabla u - (\nabla u)_R|^2 \, dx + R^{m-2+2\beta+\sigma} \right]$$

für $0 \leq \rho \leq R$ und mit Konstante $c_{15} = c_{15}(m, n, \lambda, \mu, \Gamma_0, L, \omega, \kappa, d, \beta)$. Wir können nun auf

$$\Lambda(R) := \int_{B_R(x_0)} |\nabla u - (\nabla u)_R|^2 \, dx$$

das Iterationslemma 4.1 anwenden, da die Ungleichung $m - 2 + 2\beta + \sigma < m + 2$ für alle $\beta \in (0, 1)$ erfüllt ist. Zur Monotonie von Λ bemerken wir:

Bemerkung 4.3.
Für $u \in L^2(G_2, \mathbb{R}^n)$ gilt die Abschätzung

$$\int_{G_1} |u - \overline{u}_{G_1}|^2 \, dx \leq \int_{G_2} |u - \overline{u}_{G_2}|^2 \, dx$$

für den Fall, dass $G_1 \subset G_2 \subset\subset \mathbb{R}^m$ und $\overline{u}_{G_i} = \frac{1}{\mathrm{meas}(G_i)} \int_{G_i} u(y)\, dy$.

Beweis. Sei ohne Einschränkung u eine reellwertige Funktion. Addition der Ungleichung für jede Komponente liefert dann die Behauptung. Weiter sei im Folgenden G_1 eine Nichtnullmenge, da sonst die Behauptung klar ist. Wir definieren die reellwertige Hilfsfunktion

$$H(c) := \int_{G_1} |u - c|^2 \, dx$$

für $c \in \mathbb{R}$. Da die Mengen G_i, $i = 1, 2$, beschränkt sind, ist H wohldefiniert. Der Integrand $|u - c|^2$ ist bezüglich c differenzierbar mit Ableitung $-2(u - c) \in L^2(G_1) \subset L^1(G_1)$. Ein Satz über die Differenzierbarkeit parameterabhängiger Integrale liefert uns die Differenzierbarkeit von H mit

$$H'(c) = -2 \int_{G_1} u - c \, dx.$$

Jetzt gilt

$$0 \;=\; H'(c) \qquad \Longleftrightarrow \qquad c \;=\; \overline{u}_{G_1}.$$

Mit derselben Argumentation wie vorher ist H zweimal stetig differenzierbar mit

$$H''(c) = 2 \operatorname{meas}(G_1) > 0.$$

Daraus schließen wir, dass die Funktion H ein (globales) Minimum in $c := \overline{u}_{G_1}$ besitzt, also gilt

$$\int_{G_1} |u - \overline{u}_{G_1}|^2 \, dx \leq \int_{G_1} |u - c|^2 \, dx \qquad \text{für alle } c \in \mathbb{R}.$$

Für $c := \overline{u}_{G_2}$ liefert die Nichtnegativität des Integranden die gesuchte Abschätzung für u. $\square$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} &\int_{B_\rho(x_0)} |\nabla u - (\nabla u)_\rho|^2 \, dx \\ &\leq c_{16} \rho^{m-2+2\beta+\sigma} \left[R^{-(m-2+2\beta+\sigma)} \int_{B_R(x_0)} |\nabla u - (\nabla u)_R|^2 \, dx + 1 \right] \end{aligned} \tag{4.25}$$

für alle $0 < \rho \leq R$ mit Konstante $c_{16} = c_{16}(m, n, \lambda, \mu, \Gamma_0, L, \omega, \kappa, d, \beta)$. Wählen wir nun wie oben schon angedeutet $\beta \in (1 - \frac{\sigma}{2}, 1)$, so gilt $\gamma := m - 2 + 2\beta + \sigma > m$ und wir verlieren die Abhängigkeit von der Konstanten β. Sei im Folgenden $y \in B_d(0)$. Wir bezeichnen mit $(\nabla u)_\rho$ den Mittelwert von ∇u auf dem jeweiligen Integrationsgebiet. Wir definieren nun $R_0 := 4^{-i_1} d/16 < 4^{-i_1} d/4$ und unterscheiden die folgenden Fälle:

1. Fall: $\rho < R_0$

(4.25) und Bemerkung 4.3 liefern

$$\begin{aligned} \rho^{-\gamma} \int_{B_\rho(y) \cap B_d(0)} |\nabla u - (\nabla u)_\rho|^2 \, dx &\leq \rho^{-\gamma} \int_{B_\rho(y)} |\nabla u - (\nabla u)_\rho|^2 \, dx \\ \leq \;\; c_{16} \left[R_0^{-\gamma} \int_{B_{R_0}(y)} |u - (\nabla u)_{R_0}|^2 \, dx + 1 \right]. \end{aligned}$$

2. Fall: $\rho \geq R_0$

Es ist $\rho^{-\gamma} \leq R_0^{-\gamma}$, damit

$$\rho^{-\gamma} \int_{B_\rho(y) \cap B_d(0)} |\nabla u - (\nabla u)_\rho|^2 \, dx \leq R_0^{-\gamma} \int_{B_d(0)} |\nabla u - (\nabla u)_d|^2 \, dx.$$

Beachte nun noch

$$\int_{B_{R_0}(y)} |\nabla u - (\nabla u)_{R_0}|^2 \, dx \leq 4 \int_{B_{R_0}(y)} |\nabla u|^2 \, dx.$$

Die Terme auf den rechten Seiten von Fall 1 und Fall 2 lassen sich nun mit der Energieabschätzung (4.16), unabhängig von u und y abschätzen. Also ergibt sich insgesamt:

$$\rho^{-\gamma} \int_{B_\rho(y) \cap B_d(0)} |\nabla u - (\nabla u)_\rho|^2 \, dx \leq c_{17} \tag{4.26}$$

für alle $\rho > 0$ und $y \in B_d(0)$ mit Konstante $c_{17} = c_{17}(m, n, \lambda, \mu, \Gamma_0, L, \omega, \kappa, d)$. Per Definition ist also gezeigt, dass $u \in \mathcal{L}^{2,\gamma}(B_d(0), \mathbb{R}^n)$ mit $m < \gamma \leq m + 2$ und

$$\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^{2,\gamma}(B_d(0), \mathbb{R}^n)} \leq c_{17}. \tag{4.27}$$

Folgender Satz liefert die Hölderstetigkeit von ∇u mit $G := B_d(0)$ und $A := \frac{1}{2}\text{meas}(B_1(0))$.

Satz 4.4 (Campanato)**.**
Sei $G \subset \mathbb{R}^m$ ein Gebiet, das die folgende Bedingung erfüllt:

Es existiert ein $A > 0$, so dass $\text{meas}(B_\rho(y) \cap G) \geq A\rho^m$ für alle $y \in G$.

Für $m < \gamma \leq m + p$ gilt dann

$$\mathcal{L}^{p,\gamma}(G) \cong C^{0,\alpha}(\overline{G}), \ \textit{mit} \ \alpha = \frac{\gamma - m}{p}.$$

Im Falle $\lambda > m + p$ und $u \in \mathcal{L}^{p,\gamma}(G)$ ist u konstant.

Beweis. siehe [GM, Thm. 5.4]. □

Wir definieren $\alpha = \frac{\gamma - m}{2}$ wie in Satz 4.4. In dem Beweis dieses Satzes finden wir zudem die Abschätzung

$$\text{Höl}_{\alpha, B_d(0)} \nabla u \leq c \, \|\nabla u\|_{\mathcal{L}^{2,\gamma}(B_d(0), \mathbb{R}^{m \times n})} \tag{4.28}$$

mit Konstante c unabhängig von ∇u. Die Hölderstetigkeit von ∇u impliziert die Stetigkeit von ∇u auf $\overline{B_d(0)}$. Also existiert ein $y \in \overline{B_d(0)}$ mit $\sup_{B_d(0)} |\nabla u| = |\nabla u(y)|$. Weiter gilt mit der Dreiecksungleichung

$$|\nabla u(y)| \leq |\nabla u(y) - (\nabla u)_d| + |(\nabla u)_d|.$$

Außerdem schätzen wir ab

$$\begin{aligned} |(\nabla u)_d| &\leq \frac{1}{\text{meas}(B_d(0))} \int_{B_d(0)} |\nabla u| \, dx \\ &\underset{\text{Hölder}}{\leq} \frac{1}{\text{meas}(B_d(0))} \left(\int_{B_d(0)} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \text{meas}(B_d(0))^{\frac{1}{2}} \\ &\underset{\text{Lemma 2.11}}{\leq} c_{18} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
|\nabla u(y) - (\nabla u)_d| &\leq \frac{1}{\operatorname{meas}(B_d(0))} \int_{B_d(0)} |\nabla u(y) - \nabla u(x)|\, dx \\
&\leq \frac{1}{\operatorname{meas}(B_d(0))} \int_{B_d(0)} \text{Höl}_{\alpha,B_d} \nabla u \underbrace{|x-y|^\alpha}_{\leq (2d)^\alpha} dx \\
&\underset{\substack{(4.27)\\(4.28)}}{\leq} c_{19},
\end{aligned}$$

wobei die Konstanten c_{18} und c_{19} von den üblichen Parametern m, n, λ, μ, Γ_0, L, ω, κ und d abhängen, insbesondere nicht von u.
Dies zusammen mit (4.27) und (4.28) liefert

$$\|\nabla u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{B_d(0)},\mathbb{R}^{m\times n})} \leq c_{20}, \tag{4.29}$$

auch hier gilt $c_{20} = c_{20}(m,n,\lambda,\mu,\Gamma_0,L,\omega,\kappa,d)$. Wir haben also eine a-priori Abschätzung für die Höldernorm auf $B_d(0)$ des Gradienten ∇u einer Darstellung u von U gefunden. Ein Skalierungsargument, vgl. Kapitel 3, liefert uns die Gültigkeit des folgenden Satzes.

Satz 4.5.
Sei u eine Darstellung von U in Koordinaten zentriert um $\mathcal{Q}$ auf $\mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$. Dann existieren Konstanten $C = C(m,n,\lambda, \mu,\omega,\kappa,L,\Gamma_0)$ und $\alpha = \alpha(m,\lambda,\mu,L,\omega,\kappa)$, so dass folgende Abschätzung gilt:

$$d\|\nabla u\|_{C^0(\overline{B_d(0)},\mathbb{R}^{m\times n})} + d^{1+\alpha} \textit{Höl}_{\alpha,B_d(0)} \nabla u \leq C.$$

Kapitel 5

Hölderabschätzungen für den Gradienten am Rand

In diesem Abschnitt untersuchen wir eine Darstellung $u = \Psi \circ U \circ \chi^{-1}$ von U auf Σ_{5d} mit dem Ziel, Hölderabschätzungen für den Gradienten ∇u von u herzuleiten. Hierbei sei Ψ eine auf $\mathcal{Q}$ zentrierte, (nicht notwendigerweise normale) Karte von $\mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$ und χ eine lokale Karte von $\mathcal{M}$. Weiterhin sei $g \in C^{1,\alpha_0}(\overline{\Sigma_{5d}}, \mathbb{R}^n)$ eine Abbildung, die mit u auf Σ_{5d}^0 übereinstimmt. Hieraus folgern wir

$$|u(x) - g(x)| \leq |u(x) - u(x_0)| + |g(x_0) - g(x)| \leq C_\alpha |x - x_0|^\alpha, \tag{5.1}$$

für $x_0 \in \Sigma_d^0(0)$, für alle $x \in \Sigma_d(0)$ und mit Konstanten α und C_α, die nur von den Konstanten aus Satz 3.4 abhängen. Die Euler-Lagrange-Gleichungen haben in diesem Abschnitt die Form:

$$\int_{\Sigma_{5d}} A^{\alpha\beta}(x) D_\alpha u^i D_\beta \varphi^i \, dx = \int_{\Sigma_{5d}} f^l(u) \varphi^l \, dx$$

für alle $\varphi \in W_0^{1,2}(\Sigma_{5d}, \mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\Sigma_{5d}, \mathbb{R}^n)$. Mit der Ungleichung (5.1) können wir dann folgendes Lemma, welches in ähnlicher Form in [GH, Proposition 9] zu finden ist und welches ein Analogon zu Formel (4.23) darstellt, beweisen:

Lemma 5.1.
Es existiert ein $d \geq R = R(m, n, \lambda, \mu, \omega, \kappa, L, \alpha_0, \Gamma_0, \|g\|_{C^{1,\alpha_0}(\overline{\Sigma_{5d}}, \mathbb{R}^n)}, d) > 0$, so dass für $x_0 \in \Sigma_d^0(0)$ und für alle $0 \leq \rho \leq R$ die Abschätzung

$$\int_{S_\rho(x_0)} |\nabla u|^2 \, dx \leq c_1'' \rho^{m-2+2\alpha} \tag{5.2}$$

mit Konstante $c_1'' = c_1''(m, \lambda, \mu, L, \omega, \kappa, d, \|g\|_{C^{1,\alpha_0}(\overline{\Sigma_{5d}}, \mathbb{R}^n)}, \Gamma_0)$ gilt.

Beweis. Sei η_ρ eine Familie von Abschneidefunktionen, vgl. [A, 2.18], die folgende Bedingungen erfüllt:

$$\eta_\rho \in C_0^\infty(B_{2\rho}(x_0)),\ 0 \le \eta_\rho \le 1,\ \eta_\rho \equiv 1 \text{ auf } B_\rho(x_0) \text{ und } |\nabla \eta_\rho| \le \frac{2}{\rho}.$$

Wir betrachten dann $\varphi := (u-g)\eta_\rho^2$ als zulässige Testfunktion für die Euler-Lagrange-Gleichungen, falls $\rho \le d$. Die im Folgenden auftauchenden Terme der Form $|u-g|$ werden mit (5.1) abgeschätzt. Die Elliptizität von $A^{\alpha\beta}$ und die Youngsche-Ungleichung liefern dann folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
&\lambda^* \int_{S_{2\rho}(x_0)} |\nabla u|^2 \eta_\rho^2\, dx \\
\le\ & \int_{S_{2\rho}(x_0)} A^{\alpha\beta} D_\alpha u^i D_\beta u^i \eta_\rho^2\, dx \\
=\ & \int_{S_{2\rho}(x_0)} f^l(u)(u^l - g^l)\eta_\rho^2\, dx + \int_{S_{2\rho}(x_0)} A^{\alpha\beta} D_\alpha u^i D_\beta g^i \eta_\rho^2\, dx \\
& - \int_{S_{2\rho}(x_0)} A^{\alpha\beta} D_\alpha u^i (u^i - g^i) 2\eta_\rho D_\beta \eta_\rho\, dx \\
\le\ & \mu^* \Gamma_0 \int_{S_{2\rho}(x_0)} |\nabla u|^2 |u-g| \eta_\rho^2\, dx + \mu^* \int_{S_{2\rho}(x_0)} |\nabla u||\nabla g| \eta_\rho^2\, dx \\
& + 4\mu^* \rho^{-1} \int_{S_{2\rho}(x_0)} |\nabla u| \eta_\rho |u-g|\, dx \\
\le\ & \left[\mu^* \Gamma_0 C_\alpha (2\rho)^\alpha + \varepsilon\right] \int_{S_{2\rho}(x_0)} |\nabla u|^2 \eta_\rho^2\, dx + \frac{(\mu^*)^2}{2\varepsilon} \int_{S_{2\rho}(x_0)} |\nabla g|^2 \eta_\rho^2\, dx \\
& + \left(\frac{4\mu^*}{\rho}\right)^2 \frac{1}{2\varepsilon} \int_{S_{2\rho}(x_0)} |u-g|^2 \eta_\rho^2\, dx \\
\le\ & \left[\mu^* \Gamma_0 C_\alpha (2\rho)^\alpha + \varepsilon\right] \int_{S_{2\rho}(x_0)} |\nabla u|^2 \eta_\rho^2\, dx + \frac{(\mu^*)^2}{2\varepsilon} \|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Sigma_{5d}},\mathbb{R}^n)} c(m)(2\rho)^m \\
& + (4\mu^*)^2 \frac{1}{2\varepsilon} C_\alpha^2 c(m) \rho^{m-2+2\alpha}.
\end{aligned}$$

Wir absorbieren nun den $|\nabla u|^2\eta_\rho^2$-Term, indem wir $R := \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda^*}{4\mu^*\Gamma_0 C_\alpha}\right)^{1/\alpha}$ wählen und $\rho \le R$ annehmen. Dann gilt

$$\mu^* \Gamma_0 C_\alpha (2\rho)^\alpha + \varepsilon \le \mu^* \Gamma_0 C_\alpha (2R)^\alpha + \varepsilon.$$

Wir wählen nun $\varepsilon := \varepsilon(R) := \frac{\lambda^*}{2} - \mu^* \Gamma_0 C_\alpha (2R)^\alpha = \frac{\lambda^*}{4} > 0$.
Damit folgt $\mu^* \Gamma_0 C_\alpha (2R)^\alpha + \varepsilon = \frac{\lambda^*}{2}$ und es ergibt sich

$$\int_{S_\rho(x_0)} |\nabla u|^2\, dx \le \int_{S_{2\rho}(x_0)} |\nabla u|^2 \eta_\rho^2\, dx \le C\rho^{m-2+2\alpha} \tag{5.3}$$

für alle $\rho \le R$. □

Sei nun R die Konstante aus Lemma 5.1. Durch eventuelle Verkleinerung von R gelte auch $R < 4^{-i_1} d/4$, wobei i_1 die Konstante aus Satz 2.12 ist. Alle im Folgenden erscheinenden

Konstanten der Form c_i'' hängen unter anderem von $\|g\|_{C^{1,\alpha_0}(\overline{\Sigma_{5d}},\mathbb{R}^n)}$ ab und sind monoton steigend in $t \mapsto \|tg\|_{C^{1,\alpha_0}(\overline{\Sigma_{5d}},\mathbb{R}^n)}$ für $t \in [0,1]$, vgl. Bemerkung 3.3. Die Konstanten c_i' und c_i'' hängen zudem von den Randdaten des Problems, vgl. Kapitel 4, ab. Nur zusätzliche Abhängigkeiten werden im Folgenden erwähnt. Dies bemerken wir, damit wir später den Existenssatz beweisen können. In diesem Abschnitt gehen wir im Wesentlichen analog zum inneren Fall vor. Wir betrachten nämlich den „eingefrorenen“ Hauptteil und das dazugehörige Dirichlet-Problem:

$$-D_\beta(A^{\alpha\beta}(x_0)D_\alpha v) = 0 \quad \text{in } S_R(x_0), \tag{5.4}$$

$$v - u \quad \in W_0^{1,2}(S_R(x_0),\mathbb{R}^n). \tag{5.5}$$

Es gelten die analogen Aussagen zu (4.5), (4.6) und (4.7) mit $S_R(x_0)$ statt $B_R(x_0)$, insbesondere ist die Lösung v der eindeutige Minimierer des zugehörigen Variationsproblems. Wir bezeichnen mit α den kleinsten der bislang aufgetauchten Hölderexponenten. Die beiden Abschätzungen (4.8) und (4.9) gelten nicht in der Form. Nach Campanato gelten jedoch die folgenden beiden Lemmata

Lemma 5.2.
Sei $\psi \in W^{1,2}(S_R(x_0),\mathbb{R}^n)$ eine Lösung des Systems $D_\beta(A^{\alpha\beta}(x_0)D_\alpha\psi) = D_\beta f_\beta$ mit $f_\beta \in L^2(S_R(x_0),\mathbb{R}^n)$ und $\psi = 0$ auf $\Sigma_R^0(x_0)$. Dann existiert eine Konstante $c = c(\lambda,\mu) > 0$, so dass für alle $0 < \rho \le R$ gilt

$$\int_{S_\rho(x_0)} |\nabla\psi|^2\,dx \le c\left[\left(\frac{\rho}{R}\right)^m \int_{S_R(x_0)} |\nabla\psi|^2\,dx + \sum_{\beta=1}^m \int_{S_R(x_0)} |f_\beta|^2\,dx\right].$$

Beweis. Da unser System vollständig entkoppelt ist, haben wir ein System von n Gleichungen. Anwendung von [Ca, Lemma 12.I] auf jede dieser n Gleichungen liefert die Behauptung für $\rho < R$. Offenbar gilt für $\rho = R$ die Abschätzung ebenso. □

Lemma 5.3.
Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Lemma 5.2, existiert eine Konstante $c = c(\lambda,\mu) > 0$, so dass für alle $0 < \rho \le R$ und für alle $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$\sum_{\beta=1}^{m-1} \int_{S_\rho(x_0)} |D_\beta\psi|^2\,dx \le c\left(\frac{\rho}{R}\right)^{m+2} \sum_{\beta=1}^{m-1} \int_{S_R(x_0)} |D_\beta\psi|^2\,dx + c\sum_{\beta=1}^m \int_{S_R(x_0)} |f_\beta - \alpha_\beta|^2\,dx$$

und

$$\begin{aligned}\int_{S_\rho(x_0)} |D_m\psi - (D_m\psi)_\rho|^2\,dx \quad &\le \quad c\left(\frac{\rho}{R}\right)^{m+2} \int_{S_R(x_0)} |D_m\psi - (D_m\psi)_R|^2\,dx \\ &\quad + c\sum_{\beta=1}^m \int_{S_R(x_0)} |f_\beta - \alpha_\beta|^2\,dx.\end{aligned}$$

Beweis. siehe [Ca, Lemma 12.II] und die Bemerkung im Beweis von Lemma 5.2. □

Angesichts der Randabbildung g können wir die vorangegangenen Lemmata nicht direkt auf die Abbildung v anwenden. Es bietet sich an, die Abbildung $\psi := v - g \in W^{1,2}(S_R(x_0), \mathbb{R}^n)$ zu betrachten, um (schwache) Nullrandwerte auf $\Sigma_R^0(x_0)$ zu erzeugen. Dieses ψ erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 5.2 und Lemma 5.3 mit $f_\beta := -A^{\alpha\beta}(x_0) D_\alpha g \in C^{0,\alpha}(\overline{\Sigma_{5d}}, \mathbb{R}^n)$. Die Abschätzungen aus den Lemmata implizieren erstens

$$\begin{aligned}
&\int_{S_\rho(x_0)} |\nabla\psi|^2\,dx \\
\leq\ & c\left(\frac{\rho}{R}\right)^m \int_{S_R(x_0)} |\nabla\psi|^2\,dx + c\sum_{\beta=1}^{m}\int_{S_R(x_0)} |A^{\alpha\beta}(x_0)D_\alpha g|^2\,dx \\
\leq\ & c_3'\left(\frac{\rho}{R}\right)^m \int_{S_R(x_0)} |\nabla\psi|^2\,dx + c_3'' R^m
\end{aligned} \tag{5.6}$$

und zweitens für $\alpha_\beta := -A^{\alpha\beta}(x_0) D_\alpha g(x_0)$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\beta=1}^{m-1}\int_{S_\rho(x_0)} |D_\beta\psi|^2\,dx \\
\leq & c\left(\frac{\rho}{R}\right)^{m+2}\sum_{\beta=1}^{m-1}\int_{S_R(x_0)} |D_\beta\psi|^2\,dx + c\sum_{\beta=1}^{m}\int_{S_R(x_0)} \underbrace{|A^{\alpha\beta}(x_0)D_\alpha g - A^{\alpha\beta}(x_0)D_\alpha g(x_0)|^2}_{\leq cR^{2\alpha}\|g\|^2_{C^{1,\alpha}(\overline{\Sigma_{5d}},\mathbb{R}^n)}}\,dx \\
\leq & c_4'\left(\frac{\rho}{R}\right)^{m+2}\sum_{\beta=1}^{m-1}\int_{S_R(x_0)} |D_\beta\psi|^2\,dx + c_4'' R^{m+2\alpha},
\end{aligned} \tag{5.7}$$

sowie drittens

$$\begin{aligned}
&\int_{S_\rho(x_0)} |D_m\psi - (D_m\psi)_\rho|^2\,dx \\
\leq & c\left(\frac{\rho}{R}\right)^{m+2}\int_{S_R(x_0)} |D_m\psi - (D_m\psi)_R|^2\,dx + c\sum_{\beta=1}^{m}\int_{S_R(x_0)} |A^{\alpha\beta}(x_0)\big(D_\alpha g - D_\alpha g(x_0)\big)|^2\,dx \\
\leq & c_4'\left(\frac{\rho}{R}\right)^{m+2}\int_{S_R(x_0)} |D_m\psi - (D_m\psi)_R|^2\,dx + c_4'' R^{m+2\alpha}.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Aus der Tatsache $\||\nabla g|\|^2_{L^2(S_R(x_0))} \leq c(m)R^m\|g\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Sigma_{5d}},\mathbb{R}^n)}$ und aus (5.6) leiten wir eine Abschätzung für $\nabla v = \nabla\psi + \nabla g$ her:

$$\begin{aligned}
&\int_{S_\rho(x_0)} |\nabla v|^2\,dx \\
\leq\ & 2\int_{S_\rho(x_0)} \underbrace{|\nabla\psi|^2}_{\leq 2|\nabla v|^2 + 2|\nabla g|^2}\,dx + 2\int_{S_R(x_0)} |\nabla g|^2\,dx \\
\leq\ & c_5'\left(\frac{\rho}{R}\right)^m \int_{S_R(x_0)} |\nabla v|^2\,dx + c_5'' R^m.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Aufgrund der Minimierereigenschaft von v und aufgrund von (5.9) erhalten wir analog zu (4.10)

$$\begin{aligned}
&\int_{S_\rho(x_0)} |\nabla u|^2\,dx \\
&\leq\ 2\bigg[c_5'\left(\frac{\rho}{R}\right)^m \int_{S_R(x_0)} |\nabla v|^2\,dx + c_5'' R^m + \int_{S_R(x_0)} |\nabla u - \nabla v|^2\,dx\bigg] \\
&\leq\ 2\bigg[c_6'\left(\frac{\rho}{R}\right)^m \int_{S_R(x_0)} |\nabla u|^2\,dx + c_5'' R^m + \int_{S_R(x_0)} |\nabla u - \nabla v|^2\,dx\bigg]
\end{aligned} \tag{5.10}$$

für alle $\rho \leq R$. Die Integralgleichung (4.11) gilt auch hier mit $S_R(x_0)$ statt $B_R(x_0)$. Den Raum $W_0^{1,2}(\Sigma_{5d}, \mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\Sigma_{5d}, \mathbb{R}^n)$ verwenden wir hierbei entsprechend als den Raum aller Grundfunktionen. Des Weiteren gilt vollkommen analog zu (4.12) die Ungleichung $\sup_{S_R(x_0)} |u - v| \leq c_8'' R^\alpha$. Da wir die Energieabschätzung (5.2) gezeigt haben, erhalten wir mit denselben Überlegungen wie für (4.18) die Ungleichung

$$\int_{S_R(x_0)} |\nabla u - \nabla v|^2\,dx \leq c_8'' R^{m-2+3\alpha} \tag{5.11}$$

mit Konstante c_8'', die auch von Γ_0 abhängt. Wie nach (4.18) beobachtet, bemerken wir auch hier, dass die geometrischen Abhängigkeiten vereinfacht werden können, falls wir die Karcher-Koordinaten aus Lemma 2.9 verwenden. Die Abschätzung (5.11) kombiniert mit der Ungleichung (5.10) ergibt:

$$\int_{S_\rho(x_0)} |\nabla u|^2\,dx \leq 2c_6'\left(\frac{\rho}{R}\right)^m \int_{S_R(x_0)} |\nabla u|^2\,dx + 2c_5'' R^m + 2c_8'' R^{m-2+3\alpha}$$

für alle $\rho \leq R$. Sei ohne Einschränkung $\alpha < \frac{2}{3}$, dann gilt für alle $\rho \leq R$

$$\int_{S_\rho(x_0)} |\nabla u|^2\,dx \leq c_9''\bigg[\left(\frac{\rho}{R}\right)^m \int_{S_R(x_0)} |\nabla u|^2\,dx + R^{m-2+3\alpha}\bigg]. \tag{5.12}$$

Wie schon im inneren Fall wenden wir nun das Iterationslemma 4.1 auf (5.12) an, um zu folgendem Ausdruck zu gelangen

$$\int_{S_\rho(x_0)} |\nabla u|^2\,dx \leq c_{10}''\rho^{m-2+3\alpha}\bigg[R^{-(m-2+3\alpha)} \int_{S_R(x_0)} |\nabla u|^2\,dx + 1\bigg] \tag{5.13}$$

für alle $\rho \leq R$. Jetzt wollen wir die Abschätzung (5.13) mit der Abschätzung (4.22) kombinieren, um durch Iteration, wie schon im vorherigen Kapitel, den Hölderexponenten von u zu verbessern. Wir benutzen dazu diesmal die Charakterisierung hölderstetiger Funktionen von Campanato, Satz 4.4. Vorab wollen wir bemerken, dass alle nun folgenden Mittelwerte jeweils über das zugehörige Integrationsgebiet zu bilden sind. Wir indizieren der Einfachheit halber die Mittelwerte daher jeweils nur mit einem Radius. Für $x_0 \in \Sigma_d^0$ schätzen wir mit der Poincaré Ungleichung, vgl. [GM, Prop. 3.10], folgendermaßen ab

$$\begin{aligned}
\int_{B_\rho(x_0)\cap S_R(x_0)} |u - u_\rho|^2\,dx\ &\leq\ c(m)\rho^2 \int_{S_\rho(x_0)} |\nabla u|^2\,dx \\
&\leq\ c_{11}''\rho^{m+3\alpha}\bigg[R^{-(m-2+3\alpha)} \int_{S_R(x_0)} |\nabla u|^2\,dx + 1\bigg]
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Sei $R^* := R/8$, $y = (y^1, \cdots, y^m) \in \Sigma_d \cup \Sigma_d^0$ und $x_0 = (y^1, \cdots, y^{m-1}, 0) \in \Sigma_d^0$ die orthogonale Projektion von y auf Σ_d^0.

1. Fall: $B_{4\rho}(y) \cap \Sigma_d^0 = \emptyset$ und $0 < \rho \le R^*$

Mit der Poincaré Ungleichung, den Abschätzungen (4.20) und (4.16) aus dem Inneren folgt

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(y)\cap\Sigma_d} |u - u_{y,\rho}|^2\,dx &\le \rho^2 \int_{B_\rho(y)} |\nabla u|^2\,dx \\ \underset{(4.20)}{\le} & \; c_9 \rho^{m+3\alpha} \left[R^{-(m-2+3\sigma)} \int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2\,dx + 1 \right] \\ \underset{(4.16)}{\le} & \; c''(R^*) \rho^{m+3\alpha}. \end{aligned}$$

2. Fall: $B_{4\rho}(y) \cap \Sigma_d^0 \neq \emptyset$ und $0 < \rho \le R^*$

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(y)\cap\Sigma_d} |u - u_{y,\rho}|^2\,dx &\le \int_{B_{4\rho}(y)\cap\Sigma_d} |u - u_{y,4\rho}|^2\,dx \\ \le & \; \int_{S_{8\rho}(x_0)} |u - u_{x_0,8\rho}|^2\,dx \\ \underset{(5.14)}{\le} & \; c''_{11} \rho^{m+3\alpha} \left[(R^*)^{-(m-2+3\alpha)} \int_{S_{R^*}(x_0)} |\nabla u|^2\,dx + 1 \right] \\ \underset{(5.2)}{\le} & \; 2c''_{11} \rho^{m+3\alpha} \left[(R^*)^{-(m-2+3\alpha)}\, c''_1\, (R^*)^{-(m-2+2\alpha)} \right] \\ \le & \; c''_{12} \rho^{m+3\alpha}. \end{aligned}$$

3. Fall: $\rho > R^*$

Es ist $\rho^{-(m+3\alpha)} \le (R^*)^{-(m+3\alpha)}$ und damit

$$\begin{aligned} & \rho^{-(m+3\alpha)} \int_{B_\rho(y)\cap\Sigma_d(0)} |u - u_{y,\rho}|^2\,dx \\ \le & \; (R^*)^{-(m+3\alpha)} \int_{B_\rho(y)\cap\Sigma_d(0)} |u - u_{y,\rho}|^2\,dx \\ \le & \; (R^*)^{-(m+3\alpha)} \fint_{B_\rho(y)\cap\Sigma_d(0)} \int_{B_\rho(y)\cap\Sigma_d(0)} |u(x) - u(z)|^2\,dz\,dx \\ \le & \; (R^*)^{-(m+3\alpha)}\, c(m,d)\, (\mathrm{H\ddot{o}l}_{\alpha,\Sigma_d} u)^2 < \infty. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Da $\mathrm{Höl}_{\alpha,\Sigma_d} u$ wegen Satz 3.4 a-priori abgeschätzt ist, haben wir hier eine Abschätzung, die unabhängig von u ist.

Die in den drei Fällen auftretenden Konstanten hängen allesamt von R^* ab. Wir konnten R^* jedoch nur abhängig von den Daten und von d wählen.

Alles in allem erhalten wir

$$\int_{B_\rho(y)\cap\Sigma_d} |u - u_{y,\rho}|^2\,dx \le c''_{13} \rho^{m+3\alpha} \qquad \text{für alle } y \in \Sigma_d(0) \text{ und } \rho > 0.$$

Also gilt $u \in \mathcal{L}^{2,m+3\alpha}(\Sigma_d, \mathbb{R}^n)$ und $\|u\|_{\mathcal{L}^{2,m+3\alpha}(\Sigma_d,\mathbb{R}^n)} \le c''_{13}$. Nach Campanatos Charakterisierung hölderstetiger Funktionen, Satz 4.4, folgt die Hölderstetigkeit von u zum Exponenten $\frac{3}{2}\alpha$ auf $\overline{\Sigma_d}$ und eine a-priori Abschätzung der Hölderkonstanten zu diesem Exponenten.

Wir wiederholen das Iterationsargument aus dem vorherigen Kapitel und gelangen zu

$$\int_{S_\rho(x_0)} |\nabla u|^2\,dx \le c''_{13}(\beta)\rho^{m-2+2\beta} \qquad \text{für alle } 0<\rho\le R \tag{5.16}$$

für $\beta \in (0,1)$. Damit formulieren wir analog zu (4.23)

$$\int_{S_R(x_0)} |\nabla u - \nabla v|^2\,dx \le c''_{14} R^{m-2+2\beta+\alpha} \tag{5.17}$$

Wir prüfen nun die Voraussetzungen von Satz 4.4, den wir auf ∇u anwenden wollen. Dazu schätzen wir das folgende Integral ab

$$\begin{aligned} &\int_{S_\rho(x_0)} \left|\nabla u - (\nabla u)_\rho\right|^2\,dx \qquad (5.18)\\ = &\sum_{\beta=1}^{m-1} \int_{S_\rho(x_0)} \left|D_\beta u - (D_\beta u)_\rho\right|^2\,dx + \int_{S_\rho(x_0)} \left|D_m u - (D_m u)_\rho\right|^2\,dx. \end{aligned}$$

Zur Herleitung der Abschätzung führen wir nun geeignete Terme ein, die wir mit obigen Formeln kontrollieren können, insbesondere mit den Formeln (5.17) und (5.8). Die Abschätzungen sollen zur einer Form führen, auf die wir das Iterationslemma 4.1 anwenden können. Dieses Vorgehen entspricht der Beweisführung im vorangegangenen Kapitel. Wir beachten, dass aus der Hölderungleichung die Abschätzung

$$\int_{S_\rho(x_0)} \left|D_m g - (D_m g)_\rho\right|^2\,dx \le c''_4 R^{m+2\alpha}$$

folgt. Damit schätzen wir weiter ab

$$\begin{aligned} &\int_{S_\rho(x_0)} \left|D_m u - (D_m u)_\rho\right|^2\,dx\\ \le\;& 4\int_{S_\rho(x_0)} |D_m u - D_m v|^2\,dx + 4\int_{S_\rho(x_0)} \left|D_m v - (D_m v)_\rho\right|^2\,dx\\ &+ 4\int_{S_\rho(x_0)} \left|(D_m v)_\rho - (D_m u)_\rho\right|^2\,dx\\ \underset{(5.17)}{\le}\;& 8c''_{14}R^{m-2+2\beta+\alpha} + 8\int_{S_\rho(x_0)} \left|D_m\psi - (D_m\psi)_\rho\right|^2\,dx + 8\int_{S_\rho(x_0)} \left|D_m g - (D_m g)_\rho\right|^2\,dx\\ &+ 8c''_{14}R^{m-2+2\beta+\alpha}\\ \underset{(5.8)}{\le}\;& 16c''_{14}R^{m-2+2\beta+\alpha} + 8c'_4\left(\frac{\rho}{R}\right)^{m+2}\int_{S_R(x_0)} |D_m\psi - (D_m\psi)_R|^2\,dx + 8c''_4R^{m+2\alpha}\\ \le\;& 32c''_{14}R^{m-2+2\beta+\alpha} + 16c'_4\left(\frac{\rho}{R}\right)^{m+2}\int_{S_R(x_0)} |D_m v - (D_m v)_R|^2\,dx + 32c''_4R^{m+2\alpha}. \end{aligned}$$

Das Integral auf der rechten Seite schätzen wir genau wie in (4.24) ab, und erhalten

$$\begin{aligned} &\int_{S_\rho(x_0)} \left|D_m u - (D_m u)_\rho\right|^2\,dx\\ \le\;& c''_{15}\big(R^{m-2+2\beta+\alpha} + R^{m+2\alpha}\big) + c''_{16}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{m+2}\int_{S_R(x_0)} |D_m u - (D_m u)_R|^2\,dx\\ \le\;& 2c''_{15}R^{m-2+2\beta+\alpha} + c''_{16}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{m+2}\int_{S_R(x_0)} |D_m u - (D_m u)_R|^2\,dx. \qquad (5.19) \end{aligned}$$

Auf (5.19) wenden wir jetzt das Iterationslemma 4.1 an, denn für alle $\beta \in (0,1)$ ist die Ungleichung $m+2 > m-2+2\beta+\alpha$ erfüllt. Hiermit und mit Hilfe der Hölderungleichung gelangen wir zu:

$$\begin{aligned}
&\int_{S_\rho(x_0)} \left|D_m u - (D_m u)_\rho\right|^2 \, dx \\
\leq\ & c_{17}'' \rho^{m-2+2\beta+\alpha} \left[R^{-(m-2+2\beta+\alpha)} \int_{S_R(x_0)} \left|D_m u - (D_m u)_R\right|^2 \, dx + 1 \right] \\
\leq\ & c_{17}'' \rho^{m-2+2\beta+\alpha} \left[R^{-(m-2+2\beta+\alpha)} 4 \int_{S_R(x_0)} |\nabla u(x)|^2 \, dx + 1 \right] \\
\underset{(5.2)}{\leq}\ & c_{17}'' \rho^{m-2+2\beta+\alpha} c(R,m).
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Nun möchten wir die Summe in (5.18) abschätzen. Hierzu erinnern wir an den Beweis von Bemerkung 4.3 und erhalten folgende Abschätzung

$$\int_{S_\rho(x_0)} \left|D_\beta u - (D_\beta u)_\rho\right|^2 \, dx \leq \int_{S_\rho(x_0)} |D_\beta u - c|^2 \, dx \qquad \text{für alle } c \in \mathbb{R}^n.$$

Wir wählen $c := D_\beta g(x_0)$ und benutzen die Formeln (5.7) sowie (5.17)

$$\begin{aligned}
&\sum_{\beta=1}^{m-1} \int_{S_\rho(x_0)} \left|D_\beta u - (D_\beta u)_\rho\right|^2 \, dx \\
\leq\ & \sum_{\beta=1}^{m-1} \int_{S_\rho(x_0)} |D_\beta u - D_\beta g(x_0)|^2 \, dx \\
\leq\ & 8 \left[\sum_{\beta=1}^{m-1} \int_{S_\rho(x_0)} |D_\beta u - D_\beta v|^2 + |D_\beta v - D_\beta g|^2 + |D_\beta g - D_\beta g(x_0)|^2 \, dx \right] \\
\leq\ & 8 \left[\int_{S_R(x_0)} |\nabla u - \nabla v|^2 \, dx + \sum_{\beta=1}^{m-1} \int_{S_\rho(x_0)} |D_\beta \psi|^2 \, dx + c_4'' R^{m+2\alpha} \right] \\
\leq\ & 8 \left[c_{14}'' R^{m-2+2\beta+\alpha} + c(\lambda,\mu) \left(\frac{\rho}{R}\right)^{m+2} \sum_{\beta=1}^{m-1} \int_{S_R(x_0)} |D_\beta \psi|^2 \, dx + c_4'' R^{m+2\alpha} \right] \\
\leq\ & 72 \left(c_{14}'' + c_4''\right) R^{m-2+2\beta+\alpha} + 64 c(\lambda,\mu) \left(\frac{\rho}{R}\right)^{m+2} \sum_{\beta=1}^{m-1} \int_{S_R(x_0)} |D_\beta u - D_\beta g(x_0)|^2 \, dx \\
\leq\ & c'' \left[R^{m-2+2\beta+\alpha} + \left(\frac{\rho}{R}\right)^{m+2} \sum_{\beta=1}^{m-1} \int_{S_R(x_0)} |D_\beta u - D_\beta g(x_0)|^2 \, dx \right].
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Nun wenden wir das Iterationslemma 4.1 auf die monoton wachsende Funktion

$$\Lambda(R) := \sum_{\beta=1}^{m-1} \int_{S_R(x_0)} |D_\beta u - D_\beta g(x_0)|^2$$

an. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
& \sum_{\beta=1}^{m-1} \int_{S_\rho(x_0)} \left| D_\beta u - (D_\beta u)_\rho \right|^2 \, dx \\
\leq \;& c\rho^{m-2+2\beta+\alpha} \left[R^{-(m-2+2\beta+\alpha)} \sum_{\beta=1}^{m-1} \int_{S_R(x_0)} |D_\beta u - D_\beta g(x_0)|^2 \, dx + 1 \right] \\
\leq \;& c\rho^{m-2+2\beta+\alpha} \left[R^{-(m-2+2\beta+\alpha)} 2 \int_{S_R(x_0)} |\nabla u|^2 + |\nabla g|^2 \, dx + 1 \right] \\
\leq \;& c''_{18} \rho^{m-2+2\beta+\alpha}.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Addition von (5.22) und (5.20) ergibt die gesuchte Abschätzung

$$\int_{S_\rho(x_0)} \left| \nabla u - (\nabla u)_\rho \right|^2 \, dx \leq (c''_{18} + c''_{17} c(R,m)) \rho^{m-2+2\beta+\alpha} \leq c''_{20} \rho^{m-2+2\beta+\alpha}. \tag{5.23}$$

Auch hier wollen wir noch einmal daran erinnern, dass R nur abhängig von den Daten ist. Wir zeigen, dass aus den beiden Abschätzungen (5.23) und (4.25) die Abschätzung

$$\int_{B_\rho(y)\cap\Sigma_d} \left| \nabla u - (\nabla u)_\rho \right|^2 \, dx \leq c''_{21} \rho^{m-2+2\beta+\alpha} \tag{5.24}$$

für alle $y \in \Sigma_d$ und $\rho \in (0, R/8]$ folgt. Es bezeichne $(\nabla u)_{y,\rho}$ den Mittelwert von ∇u auf dem jeweiligen Integrationsgebiet und x_0 die orthogonale Projektion von y auf Σ_d^0. Um (5.24) zu beweisen, unterscheiden wir zwei Fälle:

<u>*1. Fall:*</u> $B_{4\rho}(y) \cap \Sigma_R^0(x_0) = \emptyset$

Wir setzen $\delta(y) := |x_0 - y|$. Dann liefert die Anwendung von (4.25) und von (5.23)

$$\begin{aligned}
& \int_{B_\rho(y)\cap\Sigma_d} \left| \nabla u - (\nabla u)_{y,\rho} \right|^2 \, dx \\
\leq \;& \int_{B_\rho(y)} \left| \nabla u - (\nabla u)_{y,\rho} \right|^2 \, dx \\
\underset{(4.25)}{\leq} \;& 2c_{16} \rho^{m-2+2\beta+\alpha} \delta(y)^{-(m-2+2\beta+\alpha)} \int_{B_{\delta(y)}(y)} |\nabla u - (\nabla u)_{y,\delta(y)}|^2 \, dx \\
\leq \;& 2c_{16} (2\rho)^{m-2+2\beta+\alpha} (2\delta(y))^{-(m-2+2\beta+\alpha)} \int_{S_{2\delta(y)}(x_0)} |\nabla u - (\nabla u)_{x_0,2\delta(y)}|^2 \, dx \\
\underset{(5.23)}{\leq} \;& 2c_{16} (2\rho)^{m-2+2\beta+\alpha} (2\delta(y))^{-(m-2+2\beta+\alpha)} c''_{20} (2\delta(y))^{m-2+2\beta+\alpha} \\
= \;& c''_{22} \rho^{m-2+2\beta+\alpha}.
\end{aligned}$$

<u>*2. Fall:*</u> $B_{4\rho}(y) \cap \Sigma_R^0(x_0) \neq \emptyset$

Mit Formel (5.23) gilt

$$\int_{B_\rho(y)\cap\Sigma_d} \left| \nabla u - (\nabla u)_\rho \right|^2 \, dx \leq \int_{S_{8\rho}(x_0)} |\nabla u - (\nabla u)_{x_0,8\rho}|^2 \, dx \leq c''_{20} (8\rho)^{m-2+2\beta+\alpha}.$$

Für große Radien ρ schätzen wir wie zuvor in (5.15) ab. Also gilt (5.24). Wählen wir nun

$\beta \in (1 - \frac{\alpha}{2}, 1)$, so ist die Ungleichung $m + 2 \geq m - 2 + 2\beta + \alpha > m$ erfüllt. Anwendung von Satz 4.4 liefert uns jetzt wie im vorherigen Kapitel eine a-priori Schranke an $\text{Höl}_{\alpha,\Sigma_d} \nabla u$. Damit erhalten wir die Stetigkeit von ∇u auf $\overline{\Sigma_d(0)}$ und wir können wie schon im vorherigen Kapitel $\|\nabla u\|_{C^0(\overline{\Sigma_d(0)}, \mathbb{R}^{m \times n})}$ abschätzen. Wir haben also eine a-priori Abschätzung für die Höldernorm des Gradienten ∇u einer Darstellung u von U auf $\overline{\Sigma_d(0)}$ gefunden. Ein Skalierungsargument, vgl. Kapitel 3, liefert uns die Gültigkeit des folgenden Satzes.

Satz 5.4.
Sei u eine Darstellung von U in Koordinaten zentriert um $\mathcal{Q}$ auf $\mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$. Für eine gegebene Abbildung $g \in C^{1,\alpha_0}(\overline{\Sigma_{5d}}, \mathbb{R}^n)$ mit $u_{|\Sigma^0_{5d}} = g_{|\Sigma^0_{5d}}$ existieren Konstanten $C = C(m, n, \lambda, \mu, \omega, \kappa, L, \Gamma_0, \|g\|_{C^{1,\alpha_0}(\overline{\Sigma^0_{5d}}, \mathbb{R}^n)})$ und $\alpha = \alpha(m, \alpha_0, \lambda, \mu, L, \omega, \kappa)$, so dass folgende Abschätzung gilt:

$$d\|\nabla u\|_{C^0(\overline{\Sigma_d}, \mathbb{R}^{m \times n})} + d^{1+\alpha} \mathit{Höl}_{\alpha,\Sigma_d} \nabla u \leq C.$$

Kapitel 6

$C^{2,\alpha}$-Abschätzungen

In diesem Kapitel gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen der vorherigen Kapitel und von Satz 2.13. Wir zeigen im Folgenden durch Anwendung der linearen Theorie der elliptischen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung die $C^{2,\alpha}$-Regularität einer harmonischen Abbildungen U zwischen einer Finsler-Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ und einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$. Dabei erfülle U die Kleinheitsbedingung $U(\mathcal{M}) \subset \mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$ für einen regulären Ball $\mathcal{B}_L(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{N}$ und die Randbedingung $U = \Phi$ auf $\partial\mathcal{M}$ für eine Abbildung $\Phi \in C^{2,\alpha}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$.
Zu einem inneren Punkt $\mathcal{P} \in \mathcal{M}$ existiert eine Karte $(\chi, \Omega_{\mathcal{P}})$, so dass $\mathcal{P} \in \Omega_{\mathcal{P}}$, $\chi(\Omega_{\mathcal{P}}) = B_{4d}(0)$ und $\chi(\mathcal{P}) = 0$. Wir definieren wie vorher die Darstellung $u = \Psi \circ U \circ \chi^{-1} : B_{4d}(0) \to \mathbb{R}^n$ von U für eine, nicht notwendigerweise normale Karte $\Psi : \mathcal{B}_L(\mathcal{Q}) \to \mathbb{R}^n$, die um $\mathcal{Q}$ zentriert ist. Dementsprechend sei g die Darstellung von Φ. Für einen Randpunkt können wir dies analog machen. In Satz 4.5 und Satz 5.4 haben wir zeigen können, dass $u \in C^{1,\alpha}(\overline{B_d(0)}, \mathbb{R}^n)$ bzw. $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Sigma_d(0)}, \mathbb{R}^n)$ und dass die zu diesen Räumen gehörenden Normen von u a-priori abgeschätzt sind. Weiterhin haben wir vorausgesetzt, dass die Zielmannigfaltigkeit $\mathcal{N} \in C^3$ ist. Wie schon in Kapitel 2 diskutiert, besitzen damit die Komponenten des Fundamentaltensors $h_{ij}(u)$ von $\mathcal{N}$ bezüglich der Karte $\Psi : \mathcal{B}_L(\mathcal{Q}) \to \mathbb{R}^n$ und bezüglich lokaler Koordinaten $u^1, \ldots, u^n$ die Regularität $h_{ij} \in C^2(\mathcal{N}, \mathbb{R})$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$. Des Weiteren sind die Christoffel-Symbole Γ^l_{jk} der Riemann'schen Metrik h C^1-regulär. Also gilt

$$f^l(u) = \Gamma^l_{jk}(u) A^{\alpha\beta}(x) D_\alpha u^i D_\beta u^j \in C^{0,\alpha}(\overline{B_d(0)})$$

für $l = 1, \ldots, n$. Nun betrachten wir die folgenden n linearen partiellen elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} -D_\beta(A^{\alpha\beta}(x) D_\alpha w^l) &= f^l(u) \quad \text{in } B_d(0), \\ w^l &= u^l \quad \text{auf } \partial B_d(0),\ l = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

im klassischen Sinne. Nach [GT, Thm. 6.13] haben diese n Differentialgleichungen eine eindeutige (klassische) Lösung $w \in C^0(\overline{B_d(0)}, \mathbb{R}^n) \cap C^{2,\alpha}(B_d(0), \mathbb{R}^n)$. Diese ist zugleich auch schwache Lösung der obigen Differentialgleichungen, d.h.

$$\int_{B_d(0)} A^{\alpha\beta}(x) D_\alpha w^l D_\beta \varphi^l \, dx = \int_{B_d(0)} f^l(u) \varphi^l \, dx \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(B_d(0), \mathbb{R}^n).$$

Da u die schwachen Euler-Lagrange-Gleichungen (2.7) des Energiefunktionals erfüllt, folgt

$$\int_{B_d(0)} A^{\alpha\beta}(x) D_\alpha (w^l - u^l) D_\beta \varphi^l \, dx = 0 \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(B_d(0), \mathbb{R}^n).$$

Außerdem gilt $w^l - u^l \in W_0^{1,2}(B_d(0))$ für alle $l = 1, \ldots, n$. Dies folgt aus der Stetigkeit von $w^l - u^l$ auf dem Abschluss von $B_d(0)$ und den starken Nullrandwerten von $u^l - w^l$, vgl. [A, A6.6, A6.10]. Eine Eindeutigkeitsaussage über Lösungen der letzten Differentialgleichungen, siehe [GT, Kor. 8.2], liefert uns $w^l = u^l$ fast überall in $B_d(0)$. Da beide Funktionen stetig sind, folgt $w^l = u^l$ auf $\overline{B_d(0)}$ (im klassischen Sinne). Also gilt $u \in C^{2,\alpha}(B_d(0), \mathbb{R}^n)$. Insbesondere haben wir auf Grund der Beliebigkeit von $\mathcal{P}$ gezeigt, dass U in jedem inneren Punkt von $\mathcal{M}$ zweimal stetig differenzierbar ist. [GT, Kor. 6.3] liefert noch folgende lokale Abschätzung für die Höldernorm der zweiten Ableitungen

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 \|D^2 u\|_{C^0(\overline{B_{d/2}(0)}, \mathbb{R}^{m^2 n})} + \left(\frac{d}{2}\right)^{2+\alpha} \text{Höl}_{\alpha, B_{d/2}(0)} D^2 u \leq C\Big(L + \sum_{l=1}^n \|f^l(u)\|_{C^{0,\alpha}(\overline{B_d(0)})}\Big)$$

mit Konstante $C = C(m, n, \lambda, \mu, d, \alpha)$. Diese Abschätzung liefert uns aufgrund der in den vorherigen Kapiteln in Satz 4.5 und Satz 5.4 hergeleiteten a-priori Abschätzungen für die Höldernorm von ∇u eine a-priori Abschätzung für die Höldernorm von $f^l(u)$. Insbesondere folgt damit eine a-priori Abschätzung der zweiten Ableitungen $D^2 u$ von u. Demzufolge ist die $C^{2,\alpha}(\overline{B_{d/2}(0)}, \mathbb{R}^n)$-Norm von u a-priori abgeschätzt.

Nun zeigen wir die Randregularität von U. Dazu sei $\mathcal{P} \in \partial\mathcal{M}$ und Ω eine Umgebung von $\mathcal{P}$, deren Abschluss homöomorph auf $\overline{\Sigma_{5d}(0)}$ abgebildet werden kann. Nach Satz 5.4 wissen wir, dass $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Sigma_d(0)}, \mathbb{R}^n)$ ist. Daher ist $f^l(u) \in C^{0,\alpha}(\overline{\Sigma_d(0)})$ für $l = 1, \ldots, n$. Nach der Definition einer Mannigfaltigkeit mit Rand korrespondiert $\Sigma_d^0(0)$ gerade mit $\partial\mathcal{M} \cap \overline{\Omega}$ und deshalb korrespondieren alle $x \in \Sigma_d(0)$ mit inneren Punkten von $\mathcal{M}$. Aus den obigen Überlegungen für den inneren Fall folgt, dass $u \in C^2(\Sigma_d(0), \mathbb{R}^n)$ ist. Offensichtlich ist $\Sigma_d^0(0)$ ein $C^{2,\alpha}$-Randstück von $\Sigma_d(0)$. Nach Annahme gilt $g \in C^{2,\alpha}(\overline{\Sigma_{5d}(0)}, \mathbb{R}^n)$ für die Darstellung der Randabbildung Φ. Also können wir die Euler-Lagrange-Gleichungen (2.7) des Energiefunktionals auch in starker Form formulieren. Die Darstellung u erfüllt damit die folgenden n partiellen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} -D_\beta(A^{\alpha\beta}(x) D_\alpha u^l) &= f^l(u) \quad && \text{in } \Sigma_d(0), \\ u^l &= g^l && \text{auf } \Sigma_d^0(0),\ l = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Dabei ist die rechte Seite $f^l(u)$ schon bekannt für $l = 1, \dots, n$ und wir haben auf der linken Seite einen linearen elliptischen Operator zweiter Ordnung. Nach [GT, Lemma 6.18] gilt $u \in C^{2,\alpha}(\Sigma_d(0) \cup \Sigma_d^0(0), \mathbb{R}^n)$. [GT, Kor. 6.7] liefert dann die Abschätzung

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{S_{d/2}(0)},\mathbb{R}^n)} \leq C\Big(L + \|g\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Sigma_d(0)},\mathbb{R}^n)} + \sum_{l=1}^{n} \|f^l(u)\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Sigma_d(0)})}\Big)$$

mit Konstante $C = C(m, \alpha, \lambda, \mu, d)$. Dies ist offenbar eine a-priori Abschätzung vom gewünschten Typ.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass zu jedem $\mathcal{P} \in int(\mathcal{M})$ (bzw. $\partial\mathcal{M}$) eine Karte $(\chi_{\mathcal{P}}, \Omega_{\mathcal{P}})$ existiert mit $\chi(\mathcal{P}) = 0$, $\Omega_{\mathcal{P}} := \chi^{-1}(B_{d/2}(0))$ (bzw. $\Omega_{\mathcal{P}} := \chi^{-1}(B_{d/2}(0) \cap \{x^m \geq 0\})$). Dies kann man erreichen, in dem man beispielsweise eine Umgebung eines Punktes $\mathcal{P} \in \partial M$ via χ auf $\Sigma_{5d}(0) \cap \Sigma_{5d}^0(0)$ abbildet, als Karte dann aber $(\chi, \chi^{-1}(B_{d/2}(0) \cap \{x^m \geq 0\})$ verwendet. Wegen der Kompaktheit von $\mathcal{M}$ erhält man auf diese Weise einen endlichen Atlas $(\chi_j, \Omega_j)_{j=1}^k$ von $\mathcal{M}$, insbesondere gilt $\mathcal{M} = \bigcup_{j=1}^k \Omega_j$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Also sind alle Darstellungen u_j von U Elemente von $C^{2,\alpha}(\overline{\chi(\Omega_j)}, \mathbb{R}^n)$, die a-priori abgeschätzt sind. Damit ist auch die im zweiten Kapitel definierte Höldernorm von U

$$\|U\|_{C^{2,\alpha}(\mathcal{M},\mathcal{N})} = \sum_{j=1}^{k} \|u_j\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\chi_j(\Omega_j)},\mathbb{R}^n)}$$

a-priori abgeschätzt. Dies beweist Satz 2.13.

Diesen (endlichen) Atlas wollen wir nun fixieren und im nächsten Kapitel verwenden, um die Existenz harmonischer Abbildungen $U : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ mit vorgeschriebenen Randwerten zu zeigen.

Kapitel 7

Existenzsatz

In diesem Abschnitt werden wir abschließend die Existenz harmonischer Abbildungen von einer vollständigen, berandeten, orientierten und kompakten Finsler-Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}, F)$ der Dimension m in eine n-dimensionale Riemann'sche Mannigfaltigkeit $(\mathcal{N}, h)$ der Klasse C^3 mit vorgeschriebenen Randdaten, die eine Kleinheitsbedingung erfüllen, beweisen. Dies verallgemeinert das Resultat in [HKW1]. Dem Beweis aus [HKW1] folgend kombinieren wir die Leray-Schauder-Abbildungsgrad-Theorie mit den in den vorherigen Kapiteln gewonnenen a-priori Abschätzungen.

Bevor wir zu dem Existenzsatz und seinem Beweis kommen, möchten wir einen kleinen technischen Einschub machen. Im Beweis werden wir Operatorgleichungen betrachten. Diese Operatoren sind durch Lösungen eines Dirichlet-Problems, also durch Lösungen partieller Differentialgleichungen, definiert. Es stellt sich die Frage, wie man solche Differentialgleichungen behandelt. Wir verwenden dazu eine Zerlegung der Eins und lokalisieren die Differentialgleichungen. Mit Hilfe der Schauder-Theorie erhalten wir dann die Lösbarkeit der Differentialgleichungen und Regularitätseigenschaften der Lösung. Präziser formulieren wir diesen Sachverhalt im Folgenden. Sei (χ_j, Ω_j), $j = 1, \ldots, k$, der in Kapitel 6 konstruierte (endliche) Atlas von $\mathcal{M}$. Sei η_j eine Zerlegung der Eins bezüglich der Ω_j, d.h. $\eta_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$ für $j = 1, \ldots, k$. Wir setzen η_j auf triviale Art durch 0 außerhalb von Ω_j für alle $j = 1, \ldots, k$, fort. Eine Abbildung $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^n$ können wir dann schreiben als

$$f = \sum_{j=1}^{k} \eta_j f.$$

Mithin ist die Funktion f durch die Funktionen $\eta_j f$, $j = 1, \ldots, k$, schon eindeutig bestimmt, welche wiederum schon eindeutig durch ihre Werte auf Ω_j bestimmt sind, da sie auf $\mathcal{M} \setminus \Omega_j$ verschwinden. Des Weiteren gilt $\operatorname{supp}(\eta_j f) \subset\subset \Omega_j$. Wir müssen zwei Fälle betrachten.

<u>*1. Fall:*</u> $\Omega_j \cap \partial\mathcal{M} \neq \emptyset$

Per Konstruktion gilt $\chi_j(\Omega_j) = B_{d/2}(0) \cap \{x^m \geq 0\}$, was $\operatorname{supp}((\eta_j f) \circ \chi_j^{-1}) \subset\subset \chi_j(\Omega_j)$ impliziert. Wir können also ein Gebiet G_j mit $\operatorname{supp}((\eta_j f) \circ \chi_j^{-1}) \subset (G_j \cup \{x^m = 0\}) \subset\subset \chi_j(\Omega_j)$ und $\partial G_j \in C^\infty$ finden.
2. Fall: $\Omega_j \cap \partial\mathcal{M} = \emptyset$
Dann gilt $\chi_j(\Omega_j) = B_{d/2}(0)$. Also finden wir auch hier ein Gebiet $G_j \subset \mathbb{R}^m$ mit $\operatorname{supp}((\eta_j f) \circ \chi_j^{-1}) \subset G_j \subset \chi_j(\Omega_j)$ und $\partial G_j \in C^\infty$.

Wir stellen fest, dass es genügt, die Funktionen $\eta_j f$, $j = 1, \ldots, k$, auf G_j zu kennen. In dem weiter unten folgenden Beweis werden Differentialgleichungen der Art

$$\begin{aligned} Tv &= f \quad \text{in } int(\mathcal{M}), \\ v &= g \quad \text{auf } \partial\mathcal{M}, \end{aligned}$$

auftauchen. Hierbei ist T ein elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung und f bzw. g sind vorgeschriebene Abbildungen von der Finsler-Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ in den $\mathbb{R}^n$. Wenn wir von Lösbarkeit dieser Differentialgleichungen, Regularität der Lösungen v oder Abschätzungen der Lösungen v sprechen, meinen wir die Lösbarkeit von

$$\begin{aligned} Tv_j &= (\eta_j f) \circ \chi_j^{-1} \quad \text{in } G_j, \\ v_j &= (\eta_j g) \circ \chi_j^{-1} \quad \text{auf } \partial G_j, \end{aligned}$$

für alle $j = 1, \ldots, k$. Als „globale“ Lösung setzen wir $v = \sum_{j=1}^k \eta_j (v_j \circ \chi_j)$. Regularitätsaussagen über v_j und Abschätzungen für v_j lassen sich somit sofort auf v übertragen, soweit die Regularität der Mannigfaltigkeit dies zulässt, d.h. die Regularität der Kartenwechsel dies zulässt. Wir ziehen uns also mit Hilfe der Zerlegung der Eins immer auf eine lokale Situation im Urbild zurück.
Des Weiteren können wir uns im Folgenden auf Abbildungen beschränken, die in den $\mathbb{R}^n$ statt nach $\mathcal{N}$ abbilden. Dies resultiert aus Lemma 2.7 und der Tatsache, dass wir Abbildungen betrachten, die in einen regulären Ball $\mathcal{B}_L(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{N}$ abbilden. Diesen können wir an Hand einer einzigen Normalkarte parametrisieren. Daraus folgt, dass wir auch das Bild aller auftauchenden Abbildungen mit einer einzigen Karte lokalisieren können. Insbesondere erinnern wir hier an die sich an Lemma 2.7 anschließende Überlegung, aus der folgt, dass die hier betrachteten Abbildungen als Abbildungen in den $\mathbb{R}^n$ dem Betrage nach durch den Radius L des regulären Balles $\mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$ beschränkt sind. Zur Vollständigkeit wiederholen wir nun unser bereits in der Einleitung formuliertes Existenzresultat.

Satz 7.1 (Existenzsatz).
Seien $(\mathcal{M}, F)$ und $(\mathcal{N}, h)$ wie oben und $\Phi \in C^{2,\alpha_0}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ für $\alpha_0 \in (0,1)$ eine vorgeschriebene Abbildung. Es gebe einen Punkt $\mathcal{Q} \in \mathcal{N}$ und eine Zahl $L > 0$, so dass $\Phi(\partial\mathcal{M}) \subset \mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$, wobei $L < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$ gelte und $\mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$ ein regulärer Ball sei. Dann existiert eine Zahl $\alpha \in (0,1)$ und eine harmonische Abbildung $U \in C^{2,\alpha}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, so dass $U_{|\partial\mathcal{M}} = \Phi_{|\partial\mathcal{M}}$ und $U(\mathcal{M}) \subset \mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$.

Wir werden sehen, dass die Zahl α genau der Hölderexponent aus Satz 2.13 ist.

Beweis. Sei $L_0 \in \mathbb{R}$, so dass
$$L = \sup_{\partial\mathcal{M}} \Phi < L_0 < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}},$$
und so dass $\mathcal{B}_{L_0}(\mathcal{Q})$ ebenfalls ein regulärer Ball ist. Wir zitieren dazu [Kar]: "Jede kompakte Teilmenge einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$, die ihren Schnittort nicht trifft, besitzt eine Umgebung, die ebenfalls punktfremd zu ihrem Schnittort ist". Wir fixieren eine Normalkarte von $\mathcal{B}_{L_0}(\mathcal{Q})$ zentriert um $\mathcal{Q}$ und nennen die Darstellung von Φ bezüglich dieser Koordinaten g. Es folgt, dass $\mathcal{Q}$ die Koordinaten $(0, \ldots, 0)$ besitzt.

Wir betrachten nun die Funktionalgleichung
$$u = \Theta(u) + \zeta, \tag{7.1}$$
wobei $\zeta = \zeta(g)$ gegeben ist durch die eindeutige Lösung des folgenden Systems von n linearen Differentialgleichungen
$$\begin{aligned} D_\beta(A^{\alpha\beta}(x) D_\alpha \zeta^i) &= 0 \quad \text{in } int(\mathcal{M}), \\ \zeta^i &= g^i \quad \text{auf } \partial\mathcal{M} \text{ für } i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{7.2}$$
Nach [GT, Thm. 6.14] ist die Lösung ζ eindeutig und es gilt $\zeta \in C^{2,\alpha}(\mathcal{M}, \mathbb{R}^n)$. Wir definieren folgende Menge
$$B_0 := \{u \in C^2(\mathcal{M}, \mathbb{R}^n) : \|u\|_{C^0(\mathcal{M},\mathbb{R}^n)} \le L_0\}.$$
Wir bemerken, dass $u \in B_0$ eine Abbildung repräsentiert, die in den regulären Ball $\mathcal{B}_{L_0}(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{N}$ abbildet. Wir definieren Θ nun als denjenigen Operator, der $u \in B_0$ auf die Lösung $v = (v^1, \ldots, v^n)$ von folgenden n linearen elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit hölderstetiger rechter Seite abbildet.
$$\begin{aligned} D_\beta(A^{\alpha\beta}(x) D_\alpha v^l) &= -\Gamma^l_{ij}(u) A^{\alpha\beta}(x) D_\alpha u^i D_\beta u^j \quad \text{in } int(\mathcal{M}), \\ v^l &= 0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{M},\ l = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{7.3}$$
Nach [GT, Thm. 6.14] sind diese Differentialgleichungen eindeutig lösbar und die Lösung v ist Element von $C^{2,\alpha}(\mathcal{M}, \mathbb{R}^n)$. Die eindeutige Lösbarkeit impliziert die Wohldefiniertheit von Θ. Bezeichnen wir mit $f(u) := (f^1(u), \ldots, f^n(u))$ die rechte Seite von (7.3), so gilt folgende Abschätzung aus der Schauder-Theorie:
$$\|v\|_{C^{2,\alpha}(\mathcal{M},\mathbb{R}^n)} \le C \|f(u)\|_{C^{0,\alpha}(\mathcal{M},\mathbb{R}^n)} \tag{7.4}$$
mit Konstante $C = C(m, \alpha, \mu, \lambda, \mathcal{M})$, wobei α der Hölderexponent aus Satz 2.13 ist. Wir definieren die in $C^2(\mathcal{M}, \mathbb{R}^n)$ offene und beschränkte Menge $\mathcal{A}$ wie folgt:
$$\mathcal{A} := \{u \in C^2(\mathcal{M}, \mathbb{R}^n) : \|u\|_{C^2(\mathcal{M},\mathbb{R}^n)} < \mathcal{K} + 1 \text{ und } \|u\|_{C^0(\mathcal{M},\mathbb{R}^n)} < L_0\},$$

wobei $\mathcal{K}$ die Konstante aus der $C^{2,\alpha}$-a-priori Abschätzung, Satz 2.13, darstellt. Offenbar gilt $\mathcal{A} \subset B_0$.

Wählen wir nun eine Folge $\left(u_m\right)_{m\in\mathbb{N}}$ aus der in $C^2(\mathcal{M},\mathbb{R}^n)$-beschränkten Menge $\mathcal{A}$, so impliziert die Ungleichung (7.4), dass alle $\Theta(u_m) = v_m$ gleichmäßig in der $C^{2,\alpha}$-Norm abgeschätzt werden können. Denn die gleichmäßige Beschränktheit der Folgenglieder u_m in der C^0-Norm impliziert die gleichmäßige Beschränktheit der stetigen Funktionen $\Gamma^l_{ij}(u_m)$ in der C^0-Norm.

Damit gilt $\Theta(\mathcal{A}) \subset C^{2,\alpha}(\mathcal{M},\mathbb{R}^n)$ und $\Theta(\mathcal{A})$ ist bezüglich der $C^{2,\alpha}(\mathcal{M},\mathbb{R}^n)$-Norm gleichmäßig beschränkt. Weiter folgt aus der Hölderstetigkeit der zweiten Ableitungen von $v \in \Theta(\mathcal{A})$ und der Abschätzung (7.4) die gleichgradige gleichmäßige Stetigkeit von $\Theta(\mathcal{A})$ im Banachraum $\left(C^2(\mathcal{M},\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{C^2(\mathcal{M},\mathbb{R}^n)}\right)$. Aus dem Satz von Arzela-Ascoli folgt nun, dass $\Theta(\mathcal{A})$ präkompakt in $C^2(\mathcal{M},\mathbb{R}^n)$ ist. Da Θ ein nichtlinearer Operator ist, müssen wir noch die Stetigkeit von Θ zeigen, um zu schließen, dass Θ ein kompakter Operator ist. Sei dazu $u_0 \in \mathcal{A}$ und $\left(u_k\right)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ eine Folge mit $u_k \to u_0$ in $C^2(\mathcal{M},\mathbb{R}^n)$ für $k \to \infty$. Auf Grund der Linearität des Differentialoperators in (7.3) und auf Grund der Abschätzung (7.4) gilt

$$\begin{aligned} & \|\Theta(u_k) - \Theta(u_0)\|_{C^2(\mathcal{M},\mathbb{R}^n)} = \|v_k - v_0\|_{C^2(\mathcal{M},\mathbb{R}^n)} \leq \|v_k - v_0\|_{C^{2,\alpha}(\mathcal{M},\mathbb{R}^n)} \\ \leq \;& C\|A^{\alpha\beta}\|_{C^{0,\alpha}(\mathcal{M},\mathbb{R}^n)}\|\Gamma^l_{ij}(u_k)D_\alpha u^i_k D_\beta u^j_k - \Gamma^l_{ij}(u_0)D_\alpha u^i_0 D_\beta u^j_0\|_{C^{0,\alpha}(\mathcal{M},\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt $D_\alpha u^i_k \to D_\alpha u^i_0$ in $C^1(\mathcal{M},\mathbb{R}^n)$ für $k \to \infty$. Mit der in Kapitel 6 bemerkten Differenzierbarkeit der Abbildungen $\Gamma^l_{ij}(\cdot)$ folgt $\Gamma^l_{ij}(u_k) \to \Gamma^l_{ij}(u_0)$ in $C^{0,\alpha}(\mathcal{M},\mathbb{R}^n)$ für $k \to \infty$. Damit schließen wir

$$\|\Theta(u_k) - \Theta(u_0)\|_{C^2(\mathcal{M},\mathbb{R}^n)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Also ist gezeigt, dass $\Theta : \mathcal{A} \to C^2(\mathcal{M},\mathbb{R}^n)$ ein kompakter Operator ist. Nun soll die Leray-Schauder-Abbildungsgrad-Theorie angewendet werden, um zu zeigen, dass die oben genannte Operatorgleichung $u = \Theta(u)+\zeta$ eine Lösung besitzt, also der Operator $\Theta+\zeta$ einen Fixpunkt hat. Wir zeigen genauer, dass der Abbildungsgrad $deg(\mathrm{Id} - s\Theta - t\zeta, \mathcal{A}, 0) = 1$ ist für $(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$. Hierzu gehen wir in zwei Schritten vor, in denen jeweils die Homotopieinvarianz des Abbildungsgrades ausgenutzt werden soll, vgl. [De, Section 8.3 (D3)].

1. Schritt:

Wir betrachten die folgende Störung der Identitätsabbildung:

$$F_s := \mathrm{Id} - s\Theta,\ s \in [0,1].$$

F_s ist eine kompakte Störung der Identität, denn $s\Theta$ ist eine Konvexkombination zweier kompakter Operatoren, nämlich von Θ und 0. Wir zeigen $0 \notin (\mathrm{Id} - s\Theta)(\partial\mathcal{A})$, um damit die Konstanz von $s \mapsto deg(\mathrm{Id} - s\Theta, \mathcal{A}, 0)$ zu beweisen.

Nehmen wir das Gegenteil an, so existiert ein $u \in \partial\mathcal{A}$ mit $0 = F_s(u) = u - s\Theta(u)$ für ein $s \in [0,1]$, d.h.

$$u = s\Theta(u).$$

Auf Grund von (7.3) erhalten wir

$$\begin{aligned} D_\beta(A^{\alpha\beta}(x)D_\alpha u^l) &= -s\Gamma^l_{ij}(u)A^{\alpha\beta}(x)D_\alpha u^i D_\beta u^j && \text{in } int(\mathcal{M}), \\ u = s\Theta(u) &= sv = 0 && \text{auf } \partial\mathcal{M},\ l = 1,\dots,n. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Da $u \in \partial A$, gilt $\sup_{\mathcal{M}}|u| \leq L_0 < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$. Unter Ausnutzung der Elliptizität von $A^{\alpha\beta}$ und den Vergleichssätzen (2.12) zeigen wir jetzt, dass

$$D_\beta(A^{\alpha\beta}(x)D_\alpha|u|^2) \geq 0 \ \text{ auf}\,\mathcal{M}. \tag{7.6}$$

Dazu betrachten wir die schwache Formulierung der Differentialgleichungen (7.5) und setzen $u\eta$ für $\eta \in C_0^\infty(\mathcal{M})$ und $\eta \geq 0$ als Testvektor ein

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{M}} A^{\alpha\beta}(x)D_\alpha u^i(D_\beta u^i\eta + u^i D_\beta\eta)\,dx = \int_{\mathcal{M}} sf^l(u)u^l\eta\,dx \\ \Rightarrow\quad & -\frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} A^{\alpha\beta}(x)D_\alpha|u|^2 D_\beta\eta\,dx = \int_{\mathcal{M}}(A^{\alpha\beta}(x)D_\alpha u^i D_\beta u^i - sf^l(u)u^l)\eta\,dx \\ \underset{(2.11)}{\geq}\quad & \int_{\mathcal{M}}\big((1-s)\underbrace{A^{\alpha\beta}(x)D_\alpha u^i D_\beta u^i}_{\geq 0} + sa_\kappa(|u|)\mathbf{E}(u)\big)\eta\,dx \\ \geq\quad & \int_{\mathcal{M}} sa_\kappa(|u|)\mathbf{E}(u)\eta\,dx \\ \geq\quad & 0. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Im letzten Schritt haben wir ausgenutzt, dass $a_\kappa(|u|) \geq a_\kappa(L_0) > 0$. Die Formel (7.6) besagt, dass $|u|^2$ eine Sublösung des linearen elliptischen Operators $D_\beta(A^{\alpha\beta}(x)D_\alpha)$ ist. Da $|u|^2 = u^i u^i \in C^2(int(\mathcal{M}))$ und $u \in C^0(\mathcal{M},\mathbb{R}^n)$, folgt aus dem schwachen Maximumprinzip, siehe z.B. [GT, Thm. 3.1], und den Nullrandwerten von u

$$\sup_{\mathcal{M}}|u|^2 \leq \sup_{\partial\mathcal{M}}|u|^2 = 0. \tag{7.8}$$

Also gilt $|u|^2 = 0$ und damit folgt $u = 0$ auf $\mathcal{M}$. Dann gilt jedoch auch $\|u\|_{C^2(\mathcal{M},\mathbb{R}^n)} = 0$ und $\|u\|_{C^0(\mathcal{M},\mathbb{R}^n)} = 0$, also $u \notin \partial\mathcal{A}$. Dies führt uns zu einem Widerspruch.
Also kann kein $u \in \partial\mathcal{A}$ mit $u = s\Theta(u)$ existieren.
Da $deg(\mathrm{Id},\mathcal{A},0) = 1$, vgl. z.B. [De, Section 8.3 (D1)], folgt nun mit der Konstanz von $s \mapsto deg(\mathrm{Id} - s\Theta,\mathcal{A},0)$, dass $deg(\mathrm{Id} - \Theta,\mathcal{A},0) = 1$ ist.

2.Schritt:
Wir betrachten die kompakte Homotopie $\Theta + t\zeta$ und damit folgende kompakte Störung der Identität:

$$\mathrm{Id} - \Theta - t\zeta.$$

Wir zeigen durch Annahme des Gegenteils, dass $0 \notin (\mathrm{Id} - \Theta - t\zeta)(\partial\mathcal{A})$.
Angenommen es existiert ein $u \in \partial\mathcal{A}$ mit $0 = u - \Theta(u) - t\zeta$. Dann gilt per Definition von Θ und ζ

$$\begin{aligned} D_\beta(A^{\alpha\beta}(x)D_\alpha u^l) &= -\Gamma^l_{ij}(u)A^{\alpha\beta}(x)D_\alpha u^i D_\beta u^j \quad \text{in } \ int(\mathcal{M}), \\ u &= tg \quad \text{auf } \ \partial\mathcal{M}, 1 \le l \le n. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Auf Grund von (7.9) und $\sup_{\mathcal{M}} |u| \le L_0 < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$ können wir die gleiche Rechnung wie in (7.7) mit $s = 1$ wiederholen. Also folgt, dass $|u|^2$ eine Sublösung des Differentialoperators $D_\beta(A^{\alpha\beta}(x)D_\alpha)$ ist. Nochmalige Anwendung des schwachen Maximumprinzips, siehe [GT, Thm. 3.1], liefert uns

$$\sup_{\mathcal{M}} |u|^2 \le \sup_{\partial\mathcal{M}} |u|^2 = t^2 \sup_{\partial\mathcal{M}} |g|^2 \le L^2 < L_0^2. \tag{7.10}$$

Also $\|u\|_{C^0(\mathcal{M},\mathbb{R}^n)} < L_0$. Da $u \in \partial\mathcal{A}$ ist, muss folglich $\|u\|_{C^2(\mathcal{M},\mathbb{R}^n)} = \mathcal{K} + 1$ gelten. Auch dies wollen wir zum Widerspruch führen.
Abschätzung (7.10) impliziert $\|u\|_{C^0(\mathcal{M},\mathbb{R}^n)} \le L$. Demnach gilt die Kleinheitsbedingung $U(\mathcal{M}) \subset \mathcal{B}_L(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{N}$, wobei U durch u und die zu Beginn des Beweises fixierte Normalkarte von $\mathcal{B}_{L_0}(\mathcal{Q})$ gegeben ist.
(7.9) impliziert $U = t\Phi$ auf $\partial\mathcal{M}$ und U harmonisch. Nun liefert die $C^{2,\alpha}$-a-priori Abschätzung, Satz 2.13, eine Konstante $\mathcal{K}_t$, für die gilt $\|u\|_{C^{2,\alpha}(\mathcal{M},\mathbb{R}^n)} \le \mathcal{K}_t$. Aus Bemerkung 3.3 zu den Randabschätzungen erhalten wir $\mathcal{K}_t \le \mathcal{K}_1 = \mathcal{K}$ für alle $t \in [0,1]$. Insbesondere gilt $\|u\|_{C^2(\mathcal{M},\mathbb{R}^n)} < \mathcal{K} + 1$. Damit folgt $u \notin \partial\mathcal{A}$, was uns zu einem Widerspruch führt.
Insofern existiert keine Lösung $u \in \partial\mathcal{A}$ von $0 = (\mathrm{Id} - \Theta - t\zeta)(u)$ für $t \in [0,1]$. Eine nochmalige Anwendung der Homotopieinvarianz des Abbildungsgrades und der im ersten Schritt erhaltenen Tatsache, dass $deg(\mathrm{Id} - \Theta, \mathcal{A}, 0) = 1$ ist, ergibt $deg(\mathrm{Id} - (\Theta + \zeta), \mathcal{A}, 0) = 1$. Nach [De, Thm. 8.2] erhalten wir schließlich die Existenz eines $u \in \mathcal{A}$ mit $u = \Theta(u) + \zeta$. Mithin hat die Funktionalgleichung (7.1) eine Lösung und durch Addition der Systeme (7.2) und (7.3) erhalten wir eine Abbildung $U \in C^{2,\alpha}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, die harmonisch ist, die die vorgegebene Randbedingung $U = \Phi$ auf $\partial\mathcal{M}$ erfüllt und die in einen regulären Ball abbildet, also $U(\mathcal{M}) \subset \mathcal{B}_L(\mathcal{Q})$. Letzteres folgt aus (7.10) mit $t = 1$. Das ist die Behauptung. □

Literaturverzeichnis

[A] H.W. Alt: *Lineare Funktionalanalysis.* Springer, Berlin, Heidelberg (2006).

[Au] T. Aubin: *Nonlinear Analysis on Manifolds, Monge-Ampere Equations.* Springer, Berlin (2005).

[BCS] D. Bao, S.-S. Chern, Z. Shen: *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry.* Springer, New York (2000).

[Ca] S. Campanato: *Equazioni ellittiche del secondo ordine e spazi* $\mathcal{L}^{2,\lambda}$. Annali Mat. Pura e Appl. **69**, 321-380 (1965).

[Caf] L.A. Caffarelli: *Regularity theorems for weak solutions of some nonlinear systems.* Comm. Pure Appl. Math **35**, 833-838 (1982).

[De] K. Deimling: *Nonlinear Functional Analysis.* Springer, Berlin, New York (1985).

[EL] J. Eells, L. Lemaire: *A report on harmonic maps.* Bull. London Math. Soc. **10**, 1-68 (1978).

[ES] J. Eells, J.H. Sampson: *Harmonic mappings of Riemannian manifolds.* Amer. J. Math **86**, 109-160 (1964).

[GG] M. Giaquinta, E. Giusti: *The singular set of the minima of certain quadratic functionals.* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa **11**, 45-55 (1984).

[GM] M. Giaquinta, L. Martinazzi: *An introduction to the regularity theory for elliptic systems, harmonic maps and minimal graphs.* Scuola Normale Superiore Pisa (2005).

[GH] M. Giaquinta, S. Hildebrandt: *A priori estimates for harmonic mappings.* J. Reine Angew. Math. **336**, 124-164 (1982).

[Gia] M. Giaquinta: *Multiple Integrals in the Calculus of Variations and nonlinear elliptic Systems.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1983).

[GKM] D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer: *Riemannsche Geometrie im Großen.* Lecture Notes Math. **55**, Springer, Berlin, Heidelberg (1968).

[GT] D. Gilbarg, N.S. Trudinger: *Elliptic partial differential equations of second order.* - Reprint of the 1998 ed. - Springer, Berlin, New York (2001).

[Ha] R. S. Hamilton: *Harmonic maps of manifolds with boundary.* Lecture Notes in Mathematics **471**. Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1975).

[HKW1] S. Hildebrandt, H. Kaul, K.-O. Widman: *Dirichlet's Boundary Value Problem for Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds.* Math. Z. **147**, 225-236 (1976).

[HKW2] S. Hildebrandt, H. Kaul, K.-O. Widman: *An Existence theorem for harmonic mappings of Riemannian manifolds.* Acta Math. **138**, 1-16 (1977).

[J1] J. Jost: *Eine geometrische Bemerkung zu Sätzen über harmonische Abbildungen, die ein Dirichletproblem lösen.* Manuscripta Math. **32**, 51-57 (1989).

[J2] J. Jost: *Riemannian Geometry and Geometric Analysis.* Springer, Berlin, Heidelberg (1995).

[JK1] W. Jäger, H. Kaul: *Uniqueness and stability of harmonic maps and their Jacobi fields.* Manuscripta Math. **28**, 269-291 (1979).

[JK2] J. Jost, H. Karcher: *Geometrische Methoden zur Gewinnung von a-priori-Schranken für harmonische Abbildungen.* Manuscripta Math. **40** , 27-77 (1982).

[Kar] H. Karcher: *Schnittort und konvexe Mengen in vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten.* Math. Annalen **177**, 105-121 (1968).

[Ka] H. Kaul: *Schranken für die Christoffelsymbole.* Manuscripta Math. **19**, 261-273 (1976).

[LU] O.A. Ladyzhenskaya, N.N. Uraltseva: *Linear and quasilinear elliptic equations.* Academic Press, New York (1968).

[M1] C.B. Morrey: *The problem of Plateau on an Riemannian Manifold.* Ann. of Math. **49**, 807-851 (1948).

[M2] C.B. Morrey: *Multiple Integrals in the calculus of variations.* Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1968).

[Me] M. Meier: *On quasilinear elliptic systems with quadratic growth.* Preprint SFB 72 Univ. Bonn (1984).

[Mo] X. Mo: *Harmonic maps from Finsler manifolds.* Illinois J. Math. **45**, 1331-1345 (2001).

[MW] H. von der Mosel, S. Winklmann: *On weakly harmonic maps from Finsler to Riemannian manifolds.* Preprint Nr. 15 Institut f. Mathematik, RWTH Aachen (2006). To appear in Annales de l'I.H.P. – Analyse non lineaire.

[Pi] M. Pingen: *Zur Regularitätstheorie elliptischer Systeme und harmonischer Abbildungen.* Dissertation Univ. Duisburg-Essen (2006).

[SZ] Y. Shen, Y. Zhang: *Second variation of harmonic maps between Finsler manifolds.* Sci. China Ser. A **47**, 39-51 (2004).